

Член-корреспондент АН СССР В. В. СОКОЛОВСКИЙ

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛН СДВИГА
В УПРУГО-ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ**

Настоящая работа посвящена осесимметричной задаче о распространении цилиндрических волн сдвига в среде, которая обладает упругими и вязко-пластическими свойствами.

Напряженное и деформированное состояния в цилиндрической системе координат $r\theta z$, ось z которой совпадает с осью симметрии, определяются компонентами напряжения $\tau_{r\theta}$ и деформации $\gamma_{r\theta}$; эти компоненты не зависят от θ , z и являются функциями r .

В основу зависимости исследований положим

$$\begin{aligned} \mu \frac{d\gamma_{r\theta}}{dt} &= \frac{d\tau_{r\theta}}{dt} && \text{при } |\tau_{r\theta}| \leq \tau_s, \\ \mu \frac{d\gamma_{r\theta}}{dt} &= \frac{d\tau_{r\theta}}{dt} + \kappa k (|\tau_{r\theta}| - \tau_s) && \text{при } |\tau_{r\theta}| \geq \tau_s, \end{aligned} \quad (1)$$

предложенные К. Гогенемзером и В. Прагером.

Здесь приняты обозначения: $\kappa = \text{sign } \tau_{r\theta}$, t — время, μ — модуль сдвига, τ_s — предел текучести на сдвиг, $\gamma_s = \tau_s / \mu$ — деформация сдвига, соответствующая пределу текучести, k — физическая константа.

Уравнение движения имеет вид (λ — плотность материала):

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = \lambda \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2), если вспомнить, что

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}, \quad v_\theta = \frac{\partial u_\theta}{\partial t}, \quad (3)$$

приводят к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = \lambda \frac{\partial v_\theta}{\partial t}, \quad \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) &= \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial t} + \kappa k \varphi (|\tau_{r\theta}| - \tau_s), \\ \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial t} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}, \end{aligned} \quad (4)$$

где функция φ определена равенствами

$$\varphi(z) = 0 \quad (z \leq 0); \quad \varphi(z) = z \quad (z \geq 0).$$

Движение среды, соответствующее решению уравнений (4), называется волной; цилиндрическая поверхность раздела двух волн, перемещающаяся с течением времени, — фронт.

Два первых уравнения (4) содержат $\tau_{r\theta}$, v_θ и составляют систему гиперболического типа. Уравнения характеристик этой системы

$$r = \pm ct + \text{const}, \quad \mu \left(\frac{dv_\theta}{dr} - \frac{v_\theta}{r} \right) = \pm c \left(\frac{d\tau_{r\theta}}{dr} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} \right) + \kappa k \varphi (|\tau_{r\theta}| - \tau_s), \quad (5)$$

где $c^2 = \mu / \lambda$, устанавливают законы распространения фронтов волн и законы изменения τ_{r_0} и v_0 вдоль этих фронтов.

Волны, на фронтах которых τ_{r_0} , v_0 и γ_{r_0} претерпевают скачки, называются прерывными или ударными.

На переднем фронте $r = ct + \text{const}$ прерывной цилиндрической волны сдвига, распространяющейся в покоящейся среде, величины τ_{r_0} , v_0 и γ_{r_0} должны удовлетворять условиям кинематической и динамической совместности

$$u_0 = 0 \text{ или } c \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0, \quad \lambda c v_0 + \tau_{r_0} = 0 \quad \text{при } r = ct + \text{const},$$

которые на основании формул (3) могут быть преобразованы к виду

$$c \gamma_{r_0} + v_0 = 0, \quad \lambda c v_0 + \tau_{r_0} = 0 \quad \text{при } r = ct + \text{const}. \quad (6)$$

Ниже будем пользоваться безразмерными величинами

$$\tau = k t, \quad \rho = k \frac{r}{c}, \quad \delta = k \frac{d}{c}, \quad T = \frac{|\tau_{r_0}|}{\tau_s}, \quad G = \kappa \frac{\gamma_{r_0}}{\gamma_s}, \quad V = \kappa \frac{v_0}{c \gamma_s}, \quad (7)$$

сохраняя за ними названия соответствующих размерных величин.

Уравнения (4) принимают вид

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{2T}{\rho} = \frac{\partial V}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{V}{\rho} = \frac{\partial T}{\partial \tau} + \varphi(T-1), \quad \frac{\partial G}{\partial \tau} = \frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{V}{\rho}. \quad (8)$$

Уравнения характеристик (5) будут:

$$\rho = \pm \tau + \text{const}, \quad \frac{dV}{d\rho} - \frac{V}{\rho} = \pm \left(\frac{dT}{d\rho} + \frac{2T}{\rho} \right) + \varphi(T-1). \quad (9)$$

Условия кинематической и динамической совместности дают

$$G + V = 0, \quad V + T = 0 \quad \text{при } \rho = \tau + \text{const}. \quad (10)$$

Уравнения (8) приводят к канонической системе уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{2T + V}{\rho} + \varphi(T-1), \quad \frac{\partial V}{\partial \beta} + \frac{\partial T}{\partial \beta} = \frac{2T - V}{\rho} - \varphi(T-1), \quad (11)$$

$$2\alpha = \tau + \rho, \quad 2\beta = \tau - \rho,$$

и к уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = \frac{\partial T}{\partial \tau} + \varphi(T-1). \quad (12)$$

Рассмотрим прямую цилиндрическую волну сдвига, образовавшуюся от возмущения на цилиндрической поверхности $\rho = \rho_0$ ($r = r_0$), которое внезапно возникло при $\tau = 0$ ($t = 0$) и изменяется непрерывно при $\tau > 0$ ($t > 0$). Передний фронт этой цилиндрической волны перемещается в сторону возрастания ρ по закону $\rho = \rho_0 + \tau$ ($r = r_0 + ct$).

Условия кинематической и динамической совместности (10) дают

$$T = -V = G \quad \text{при } \rho = \rho_0 + \tau. \quad (13)$$

Значения этих величин при $\rho = \rho_0$, $\tau = 0$, которые будем отмечать индексом „0“, также связаны равенством $T_0 = -V_0 = G_0$.

На переднем фронте $\rho = \rho_0 + \tau$, на основании (9) и (13), имеем

$$2 \frac{dT}{d\rho} + \frac{T}{\rho} + \varphi(T-1) = 0. \quad (14)$$

Решение уравнения (14) будет

$$T = 1 + \sqrt{\frac{2}{\rho}} \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right) \int_R^C \exp(\xi^2) d\xi \quad (\rho_0 \leq \rho \leq \gamma); \quad T = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho}} \quad (\rho \geq \gamma),$$

причем γ находится из уравнения

$$(T_0 - 1) \sqrt{\frac{\rho_0}{2}} \exp\frac{\rho_0}{2} = \int_{R_0}^C \exp(\xi^2) d\xi, \quad (16)$$

где обозначено $R = \sqrt{\rho/2}$, $R_0 = \sqrt{\rho_0/2}$, $C = \sqrt{\gamma/2}$.

Формулы (15), (16) имеют место при $T_0 \geq 1$.

Уравнение (12) и условие (13) приводят к формуле

$$G = T + \int_{\rho - \rho_0}^{\tau} \varphi \{T(\tau, \rho) - 1\} d\tau. \quad (17)$$

Пусть для какого-нибудь значения ρ компонента напряжения T при $\tau > \rho - \rho_0$ изменяется непрерывно, причем

$$T \geq 1 \text{ при } \rho - \rho_0 \leq \tau \leq \tau(\rho); \quad T \leq 1 \text{ при } \tau \geq \tau(\rho),$$

где $\tau = \tau(\rho)$ — момент, когда $T = 1$.

Компонента деформации G имеет вид

$$G = T + \rho - \rho_0 - \tau + \int_{\rho - \rho_0}^{\tau} T(\tau, \rho) d\tau \quad (\rho - \rho_0 \leq \tau \leq \tau(\rho)); \quad (18)$$

$$G = T + G_r(\rho) \quad (\tau \geq \tau(\rho)).$$

Компонента остаточной деформации $G_r(\rho)$ равна:

$$G_r(\rho) = \rho - \rho_0 - \tau(\rho) + \int_{\rho - \rho_0}^{\tau(\rho)} T(\tau, \rho) d\tau = G_*(\rho) - 1.$$

Индексом $*$ обозначена компонента деформации в момент $\tau = \tau(\rho)$. Рассмотрим распространение цилиндрических волн сдвига, когда на цилиндрической поверхности $\rho = \rho_0$ задано ($T_0 > 1$)

$$T = T_0(1 - \tau/\tau_1) \quad (0 \leq \tau \leq \tau_1). \quad (19)$$

Компонента деформации на цилиндрической поверхности $\rho = \rho_0$, вследствие формул (18), имеет вид:

$$G = T - \tau + T_0 \tau \left(1 - \frac{\tau}{2\tau_1}\right) \quad (0 \leq \tau \leq \tau_*); \quad (20)$$

$$G = T + T_0 \frac{\tau_*^2}{2\tau_1} \quad (\tau_* \leq \tau \leq \tau_1),$$

где $\tau_* = \tau_1(T_0 - 1)/T_0$.

На рис. 1 изображены области движения, построенные в плоскости $\tau\rho$; точки μ_{10} и μ_{11} имеют координаты $\tau = \gamma - \rho_0$, $\rho = \gamma$ и $\tau = \tau_1$, $\rho = \rho_0$.

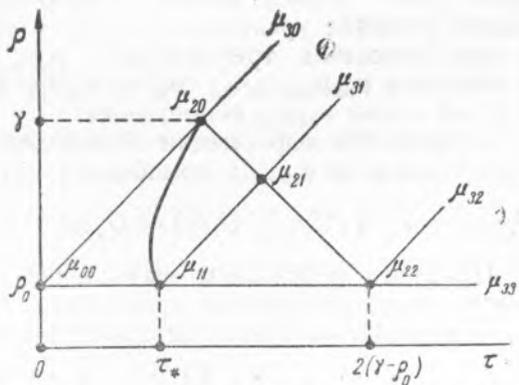


Рис. 1

Компоненты напряжения T и скорости V находятся путем построения решения уравнений (11) по данным (13) и (15) вдоль характеристики $\rho = \rho_0 + \tau$ ($\alpha = \rho - \rho_0/2$, $\beta = -\rho_0/2$) и по данным (19) вдоль прямой $\rho = \rho_0$ ($2\alpha = \tau + \rho_0$, $2\beta = \tau - \rho_0$). Сначала строится решение уравнений (11) при $\varphi(z) = z$ в треугольнике $\mu_{00} \mu_{20} \mu_{22}$ и на-

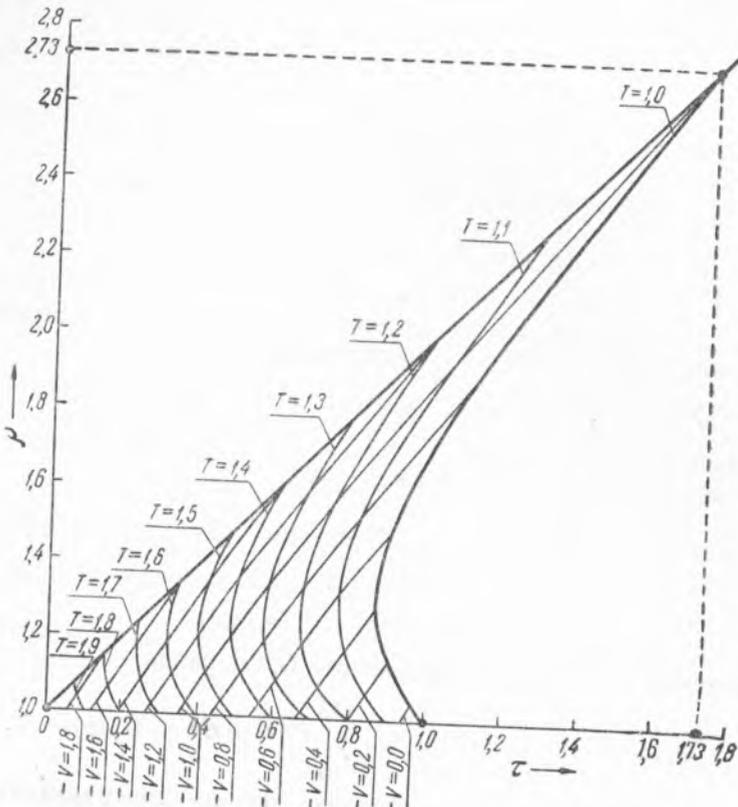


Рис. 2

ходится линия $\mu_{20} \mu_{11}$, вдоль которой $T = 1$. Это решение имеет механический смысл лишь в криволинейном треугольнике $\mu_{00} \mu_{20} \mu_{11}$. Далее решение уравнений (11) при $\varphi(z) = 0$ строится последовательно в криволинейном треугольнике $\mu_{20} \mu_{11} \mu_{21}$, в треугольнике $\mu_{11} \mu_{21} \mu_{22}$, в полосках $\mu_{20} \mu_{20} \mu_{21} \mu_{31}$, $\mu_{31} \mu_{21} \mu_{22} \mu_{32}$ и в угле $\mu_{32} \mu_{22} \mu_{33}$; величины T и V на линии $\mu_{20} \mu_{11}$ непрерывны.

Компонента деформации G определяется по (18), причем $\tau = \tau(\rho)$ есть уравнение $\mu_{20} \mu_{11}$; компонента остаточной деформации равна

$$G_r(\rho_0) = T_0 \tau_0^2 / (2 \tau_1); \quad G_r(\rho) = G_*(\rho) - 1 \quad (\rho_0 \leq \rho \leq \gamma); \quad G_r(\rho) = 0 \quad (\rho \geq \gamma).$$

Приведем результаты вычислений при помощи разностных уравнений, соответствующих уравнениям (11) для $\rho_0 = 1$, $T_0 = 2$, $\tau_1 = 2$. Значения компоненты остаточной деформации $G_r(\rho)$ будут ($\gamma = 2,73$):

ρ	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,73
G_r	0,50	0,35	0,25	0,18	0,13	0,10	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00

На рис. 2 в плоскости $\tau\rho$ и нанесены линии $T = \text{const}$ и $V = \text{const}$.

Институт механики
Академии Наук СССР

Поступило
12 IV 1948