Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 8

МАТЕМАТИКА

А. Д. ЩЕРБИНА

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ МЕТОДА ФЕЙЕРА СУММИРОВАНИЯ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 20 IV 1948)

Пусть $f(x, y)$ непрерывная функция периода 2π относительно x и y и

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{mn}[a_{mn}\cos mx\cos ny+b_{mn}\sin mx\cos ny+$$
$$+c_{mn}\cos mx\sin ny+d_{mn}\sin mx\sin ny] \qquad (1)$$

ее двойной ряд Фурье.

Как известно, частная сумма $S_{mn}(f, x, y)=S_{mn}(x, y)$ ряда (1) имеет вид

$$S_{mn}(x, y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\xi, \eta)\frac{\sin\frac{2m+1}{2}(x-\xi)\sin\frac{2n+1}{2}(y-\eta)}{\sin\frac{x-\xi}{2}\sin\frac{y-\eta}{2}}\,d\xi\,d\eta. \qquad (2)$$

Составим сумму $\sigma_{mn}(f, x, y)=\sigma_{mn}(x, y)$, представляющую арифметическую среднюю первых mn сумм $S_{kl}(x,y)$, равную

$$\sigma_{mn}(x, y)=$$
$$=\frac{1}{4\pi(m+1)(n+1)}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\xi, \eta)\left[\frac{\sin\frac{m+1}{2}(x-\xi)\sin\frac{n+1}{2}(y-\eta)}{\sin\frac{x-\xi}{2}\sin\frac{y-\eta}{2}}\right]^2 d\xi\,d\eta. \qquad (3)$$

Введем в рассмотрение суммы вида

$$\sigma(m, n, p, q, f, x, y)=\sigma(m, n, p, q)=\frac{\sum_{\mu=m-p}^{m}\sum_{\nu=n-q}^{n}S_{\mu\nu}}{(p+1)(q+1)}, \qquad (4)$$

где p и q — целые числа, удовлетворяющие неравенствам $0\leqslant p\leqslant m$, $0\leqslant q\leqslant n$.

Эти суммы представляют собой обобщение методов приближения двойными суммами Фурье (2) и суммами типа Фейера (3). Так, если $p=0$ и $q=0$, то $\sigma(m, n, p, q)$ совпадает с суммой первых m членов двойного ряда Фурье, если же $p=m$ и $q=n$, то $\sigma(m, n, p, q)$ обращается в сумму Фейера (3).

Принимая во внимание (2), можно написать сумму (4) в такой форме:

$$\sigma(m, n, p, q)=\frac{1}{4\pi^2(p+1)(q+1)}\times$$

$$\times\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, \eta)\frac{\sin\frac{2m-p+1}{2}(x-\xi)\sin\frac{p+1}{2}(x-\xi)}{\sin^2\frac{x-\xi}{2}}\times$$

$$\times\frac{\sin\frac{2n-q+1}{2}(y-\eta)\sin\frac{q+1}{2}(y-\eta)}{\sin^2\frac{y-\eta}{2}}\,d\xi\,d\eta. \tag{5}$$

Пусть $p=p(m)$ есть функция от m и $q=q(n)$ — функция от n, для которых $0\leqslant p\leqslant m$, $0\leqslant q\leqslant n$.

Мы доказываем, что имеет место следующая теорема.

Теорема. *Для того чтобы разность*

$$\sigma(m, n, p, q, f, x, y)-f(x, y)\to 0 \text{ при } m, n\to\infty \tag{6}$$

равномерно относительно x и y для любой непрерывной функции $f(x, y)$ периода 2π, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\lim_{m\to\infty}\frac{p(m)}{m}=\alpha>0, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{q(n)}{n}=\beta>0. \tag{7}$$

Зафиксировав x и y, можно рассматривать сумму $\sigma(m, n, p, q)$ как линейный функционал, определенный в пространстве непрерывных функций, где за норму f принимается $\sup|f(x, y)|$.

Норма $M_{(p, q)}^{(m, n)}$ этого функционала не зависит от x и y и имеет вид

$$M_{(p, q)}^{(m, n)}=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2(p+1)(q+1)}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|\sin\frac{2m-p+1}{2}t\sin\frac{p+1}{2}t\sin\frac{2n-q+1}{2}\tau\sin\frac{q+1}{2}\tau\right|}{\sin^2\frac{t}{2}\sin^2\frac{\tau}{2}}\,dt\,d\tau.$$

В работе С. Никольского ([1]) показано, что

$$M_p^{(m)}=\frac{1}{2\pi(p+1)}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|\sin\frac{2m-p+1}{2}t\sin\frac{p+1}{2}t\right|}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=\frac{4}{\pi^2}\lg\frac{m}{p+1}+O(1), \tag{8}$$

где $O(1)$ представляет функцию от m и p, равномерно относительно них ограниченную, поэтому

$$M_{(p, q)}^{(m, n)}=\frac{16}{\pi^4}\lg\frac{m}{p+1}\lg\frac{n}{q+1}+O\left(\lg\frac{m}{p+1}\right)+O\left(\lg\frac{n}{q+1}\right)+O(1). \tag{9}$$

Пусть теперь $T_{m-p,\, n-q}(x, y)$ — тригонометрический полином порядка $(m-p)(n-q)$. Тогда очевидно, что

$$\sigma(m, n, p, q, T_{m-p,\, n-q}, x, y) = T_{m-p,\, n-q}(x, y).$$

Если $T_{m-p,\, n-q}$ полином, наилучшим образом приближающий функцию $f(x, y)$, и если $E_{m-p,\, n-q}(f)$ обозначает максимальное уклонение от f этого полинома, то, на основании неравенства С. Н. Бернштейна [2], имеет место соотношение:

$$|\sigma(m, n, p, q, f, x, y) - f(x, y)| \leqslant (M^{(m,n)}_{(p,q)} + 1)\, E_{m-p,\, n-q}(f). \tag{10}$$

Из формул (9) и (10) вытекает теорема для случая, когда $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta < 1$. В самом деле, если p и q изменяются таким образом, что $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta < 1$, то $m - p \to \infty$ и $n - q \to \infty$, а тогда, по (9), числа $M^{(m,n)}_{(p,q)}$ ограничены, а следовательно, по (10), разность (6) стремится к нулю равномерно относительно x и y при $m, n \to \infty$.

Покажем теперь, что эта разность стремится также к нулю равномерно относительно x и y, если $\alpha = 1$ и $\beta = 1$. Этот случай содержит следующие три подслучая.

Подслучай 1. Числа $m - p$ и $n - q$ неограничены.

Выше мы показали, что при этих условиях теорема имеет место.

Подслучай 2. Числа $m - p$ и $n - q$ ограничены.

Представим сумму $\sigma(m, n, p, q)$ в такой форме:

$$\sigma(m, n, p, q) = \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{m}\sum\limits_{\nu=0}^{n} S_{\mu\nu} - \sum\limits_{\mu=0}^{m-p-1}\sum\limits_{\nu=0}^{n} S_{\mu\nu} - \sum\limits_{\mu=0}^{m}\sum\limits_{\nu=0}^{n-q-1} S_{\mu\nu} + \sum\limits_{\mu=0}^{m-p-1}\sum\limits_{\nu=0}^{n-q-1} S_{\mu\nu}}{(p+1)(q+1)} \tag{11}$$

В рассматриваемом случае $m \approx p$ и $n \approx q$, поэтому первая сумма правой части (11), подобно сумме Фейера, стремится равномерно к $f(x, y)$ при неограниченном возрастании m и n, а четвертая, вследствие ограниченности $m - p$ и $n - q$, стремится равномерно к нулю.

Далее, $|f(x, y)| < K$, где K — некоторая константа; на основании равенства (3) получаем

$$\frac{\left|\sum\limits_{\mu=0}^{m-p-1}\sum\limits_{\nu=0}^{n} S_{\mu\nu}\right|}{(p+1)(q+1)} \leqslant \frac{K}{4\pi^2 (p+1)(q+1)} \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{m-p}{2} t \sin^2 \frac{n+1}{2} \tau}{\sin^2 \frac{t}{2} \sin^2 \frac{\tau}{2}}\, dt\, d\tau \to 0$$

при $m, n \to \infty$, так как интеграл, взятый по t, представляет ограниченную величину в силу ограниченности разности $m - p$, а интеграл по τ, как известно, имеет порядок n.

Оценка третьего слагаемого (11) производится совершенно аналогично. Таким образом, разность стремится к нулю равномерно относительно x и y при $m, n \to \infty$.

Подслучай 3. Числа $m - p$ неограничены, а числа $n - q$ ограничены, или наоборот.

Итак, пусть $m - p$ неограничено, а $n - q$ ограничено. Принимая во внимание равномерную сходимость сумм (3) типа Фейера к $f(x, y)$ при $m, n \to \infty$ и то обстоятельство, что в рассматриваемом случае

$p \approx m$ и $q \approx n$, снова заключаем, что первое слагаемое правой части (11) стремится к $f(x, y)$ равномерно относительно x и y.

Далее имеем

$$\frac{\sum\limits_{\mu=0}^{m-p-1} \sum\limits_{\nu=0}^{n} s_{\mu\nu}}{(p+1)(q+1)} = \frac{m-p}{p+1} \frac{n+1}{q+1} \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{m-p-1} \sum\limits_{\nu=0}^{n} s_{\mu\nu}}{(m-p)(n+1)} \to 0 \text{ при } m, n \to \infty.$$

Выше было доказано, что если $n-q$ ограничено, то третье слагаемое равномерно стремится к нулю. Этот же факт имеет место для четвертого слагаемого.

Остается, наконец, рассмотреть случаи:

1) $0 < \alpha < 1$, $\beta = 1$;

2) $\alpha = 1$, $0 < \beta < 1$.

Случай 1. Здесь $m-p$ неограничено; если при этом $n-q$ тоже неограничено, то равномерная сходимость $\sigma(m, n, p, q)$ к f вытекает из (9) и (10). Допустим поэтому, что $n-q$ ограничено и рассмотрим какую-либо подпоследовательность значений m, для которой существует $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{p}{m} = \alpha' \geqslant \alpha$. Пусть $\alpha' < 1$ (случай $\alpha' = 1$ уже рассмотрен), тогда

$$\frac{\sum\limits_{\mu=0}^{m} \sum\limits_{\nu=0}^{n} s_{\mu\nu}}{(p+1)(q+1)} = \frac{m+1}{p+1} \frac{n+1}{q+1} \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{m} \sum\limits_{\nu=0}^{n} s_{\mu\nu}}{(m+1)(n+1)} \to \frac{1}{\alpha'} f(x, y) \quad \text{при } m, n \to \infty,$$

$$\frac{\sum\limits_{\mu=0}^{m-p-1} \sum\limits_{\nu=0}^{n} s_{\mu\nu}}{(p+1)(q+1)} = \frac{m-p}{p+1} \frac{n+1}{q+1} \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{m-p-1} \sum\limits_{\nu=0}^{n} s_{\mu\nu}}{(m-p)(n+1)} \to \frac{1-\alpha'}{\alpha'} f(x, y) \quad \text{при } m, n \to \infty.$$

Таким образом, если принять во внимание, что третье и четвертое слагаемые (11) стремятся к нулю, то правая часть (11) стремится равномерно к $f(x, y)$.

Случай 2, $\alpha = 1$, $0 < \beta < 1$, рассматривается аналогично.

Итак, достаточность условий (10) доказана. Эти условия необходимы. Действительно, если, например, $\alpha = 0$, то $M_p^{(m)}$ в силу (8) неограничено, на $M_q^{(n)}$ ограничено положительным числом сверху. Откуда $M_{p,q}^{(m,n)} = M_p^{(m)} M_q^{(n)}$ неограничено и по известному предложению о линейных функционалах с неограниченными нормами существует непрерывная периодическая функция f, для которой процесс $\sigma(m, n, p, q, f, x, y)$ расходится.

Поступило
2 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., № 4, 509 (1940).
[2] С. Н. Бернштейн, Изв. АН СССР, сер. матем., № 9, 1151 (1931).