Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 8

МАТЕМАТИКА

Действительный член АН УзССР В. РОМАНОВСКИЙ

НОВЫЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть дано однородное разностное уравнение n-го порядка

$$\varphi_{n+k} - a_1\varphi_{n+k-1} - \ldots - a_n\varphi_k = 0 \tag{1}$$

с постоянными коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(a_n \neq 0)$ и даны начальные значения

$$\varphi_1^0,\ \varphi_2^0,\ \ldots,\ \varphi_n^0 \tag{2}$$

неизвестной функции φ_k. Требуется найти функцию φ_k, удовлетворяющую уравнению (1) и для $k=\overline{1, n}$ принимающую значения (2).

Это решение уравнения (1) может быть найдено следующим образом.

Заметим прежде всего, что уравнение (1) можно написать в матричном виде

$$|E\varphi - A|\,\varphi^k = 0, \tag{3}$$

где E — единичная матрица n-го поряда,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0\ldots 0 \\ a_2 & 0 & 1\ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1} & 0 & 0\ldots 1 \\ a_n & 0 & 0\ldots 0 \end{pmatrix}$$

и где после разложения левой части по степеням φ нужно степени φ^{k+h} заменить на φ_{k+h}.

Возьмем далее однострочную матрицу

$$C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

с произвольными постоянными элементами $c_1, c_2, \ldots, c_n$ и составим произведение CA^{k-1}, которое представляет также однострочную матрицу. Сумму элементов последней мы обозначим через (CA^{k-1}), так что

$$(CA^{k-1}) \equiv \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha \sum_{\beta=1}^{m} a_{\alpha\beta}^{(k-1)}, \tag{4}$$

если через $a_{\alpha\beta}^{(k-1)}$ обозначить элементы степени A^{k-1} матрицы A.

Заметим теперь, что функция (числа k)

$$\varphi_k = (CA^{k-1}) \tag{5}$$

представляет решение уравнения (1), зависящее от произвольных постоянных c_α. Справедливость этого утверждения ясна из того, что, согласно известной теореме Кэли, матрица A удовлетворяет уравнению

$$|E\varphi - A| = 0.$$

Следовательно, выражение (5) будет требуемым решением уравнения (1), если мы найдем такие значения постоянных c_α, которые удовлетворяют условиям:

$$(CA^h) = \overset{0}{\varphi}_{h+1}, \qquad h = \overline{0, n-1} \tag{6}$$

$(A^0 \equiv E)$ и подставим найденные отсюда значения c_α в выражение (5).

Однако, как можно показать на примерах, условия (6) не всегда могут быть удовлетворены. Но, исходя из общего выражения (5), можно указать такие другие выражения для φ_k, для которых уравнения, аналогичные (6), всегда разрешимы относительно c_α. Действительно, тот факт, что выражение (5) удовлетворяет уравнению (1), обозначает, что ему удовлетворяет и каждая из функций (числа k)

$$\varphi_k^{(\beta)} = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha a_{\alpha\beta}^{(k-1)}.$$

Написав уравнения

$$\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha a_{\alpha\beta}^{(h)} = \overset{0}{\varphi}_{h+1}, \qquad h = \overline{0, n-1}, \tag{7}$$

мы без труда проверим, что определитель их равен либо ± 1, либо $\pm a_n \neq 0$, так что они дают определенные значения для c_α. В частности, если мы положим $\beta = n$, то увидим, что уравнения (7) обращаются в такие:

$$c_n = \overset{0}{\varphi}_1, \quad c_{n-1} = \overset{0}{\varphi}_2, \ldots, \ c_1 = \overset{0}{\varphi}_n. \tag{8}$$

Следовательно, требуемое решение уравнения (1) можно написать в виде:

$$\varphi_k = \overset{0}{\varphi}_n a_{1n}^{(k-1)} + \overset{0}{\varphi}_{n-1} a_{2n}^{(k-1)} + \ldots + \overset{0}{\varphi}_1 a_{nn}^{(k-1)}. \tag{9}$$

Последние утверждения относительно уравнений (7) станут ясными, если мы проследим, как составляются последовательные степени матрицы A. Мы имеем

$$A^2 = \begin{pmatrix} a_1^{(2)} & a_1^{(1)} & 1 & 0 \ldots \\ a_2^{(2)} & a_2^{(1)} & 0 & 1 \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^{(2)} & a_n^{1} & 0 & 0 \ldots \end{pmatrix},$$

где $a_\alpha^{(1)} = a_\alpha$ и $a_1^{(2)} = a_1^{(1)} a_1^{(1)} + a_2^{(1)}$, $a_2^{(2)} = a_2^{(1)} a_1^{(1)} + a_3^{(1)}, \ldots, a_n^{(2)} = a_n^{(1)} a_1^{(1)}$.

Затем

$$A^3 = \begin{pmatrix} a_1^{(3)} & a_1^{(2)} & a_1^{(1)} & 1 & 0 \ldots \\ a_2^{(3)} & a_2^{(2)} & a_2^{(1)} & 0 & 1 \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^{(3)} & a_n^{(2)} & a_n^{(1)} & 0 & 0 \ldots \end{pmatrix},$$

где $a_1^{(3)} = a_1^{(1)} a_1^{(2)} + a_2^{(2)}$, $a_2^{(3)} = a_2^{(1)} a_1^{(2)} + a_3^{(2)}, \ldots, a_n^{(3)} = a_n^{(1)} a_1^{(2)}$ и т. д.

При каждом переходе к новой степени матрицы A добавляется новый столбец слева и выбрасывается последний столбец у предшествующей степени; новый столбец составляется по рекуррентным соотношениям:

$$
\begin{aligned}
a_1^{(h+1)} &= a_1^{(1)} a_1^{(h)} + a_2^{(h)}, \\
a_2^{(h+1)} &= a_2^{(1)} a_1^{(h)} + a_3^{(h)}, \\
& \dots \dots \dots \dots \\
a_n^{(h+1)} &= a_n^{(1)} a_1^{(h)}.
\end{aligned}
$$

Ясно, что последний столбец в A^{k-1} состоит из элементов $a_\alpha^{(k-n)}$, $\alpha=\overline{1, n}$, и поэтому равенство (9) можно переписать так:

$$
\varphi_k = \varphi_n^0 a_1^{(k-n)} + \varphi_{n-1}^0 a_2^{(k-n)} + \ldots + \varphi_1^0 a_n^{(k-n)}. \tag{10}
$$

В заключение представим полученные нами решения (5) и (10) в зависимости от корней матрицы A. Пусть уравнение

$$
|E\lambda - A| = 0
$$

имеет корни

$$
\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu
$$

кратностей

$$
n_1, n_2, \ldots, n_\mu.
$$

Тогда, воспользовавшись известной формулой Перрона

$$
a_{\alpha\beta}^{(h)} = \sum_{i=1}^{\mu} \frac{1}{(n_i-1)!} D_\lambda^{n_i-1} \left[\frac{\lambda^h A_{\alpha\beta}(\lambda)}{a_i(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_i},
$$

в которой $D_\lambda^{n_i-1}$ обозначает дифференцирование $n_i - 1$ раз по λ, $A_{\alpha\beta}(\lambda)$ — алгебраическое дополнение определителя

$$
A(\lambda) = |E\lambda - A|,
$$

соответствующее строке β и столбцу α, $a_{\alpha\beta}^{(h)}$ — элемент матрицы A^h и

$$
a_i(\lambda) = A(\lambda)(\lambda - \lambda_i)^{-n_i},
$$

мы легко увидим, что равенство (5) можно написать в виде

$$
\varphi_k = \sum_{i=1}^{\mu} \frac{1}{(n_i-1)!} D_\lambda^{n_i-1} \left[\frac{\lambda^{n-1} R(\lambda)}{a_i(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_i}, \tag{11}
$$

положив

$$
R(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha \sum_{\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}(\lambda), \tag{12}
$$

а равенство (10) — в виде

$$\varphi_k = \sum_{i=1}^{\mu} \frac{1}{(n_i-1)!} D_{\lambda}^{n_i-1} \left[\frac{\lambda^{k-1} R_n(\lambda)}{a_i(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_i},$$

где

$$R_n(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^{n} \overset{0}{\varphi}_{n+1-\alpha} A_{\alpha n}(\lambda).$$

Институт математики
и механики
Академии Наук УзССР

Поступило
15 IV 1948