$$\frac{\partial\varphi_i(z,t)}{\partial t} = -\lambda\varphi_i(z,t) - \sum_{j=1}^{n}\Bigg[z_j\Bigg(\mu_j(k_jp_{ji}+k_jz_jp_{j0}-1)\frac{\partial\varphi_i(z,t)}{\partial z_j} - \mu_ik_ip_{ij}\frac{\partial\varphi_i(z,t)}{\partial z_i}+$$

$$+\mu_ik_ip_{ij}\frac{\partial\varphi_i^{\{j\}}(z,t)}{\partial z_i}\Bigg) + \Bigg(\mu_jk_j\left(p_{j0}z_j+p_{ji}z_j-1\right) - \mu_ik_ip_{ij}z_i + \frac{\lambda\, p_{0j}}{z_j}\Bigg)\varphi_i(z,t)+$$

$$+\Bigg(\mu_jk_jp_{ij} - \mu_ik_ip_{ij}\frac{z_i}{z_j} - \frac{\lambda\, p_{0j}}{z_j}\Bigg)\varphi_i^{\{j\}}(z,t)-$$

$$-\mu_jk_jp_{ji}\frac{z_j}{z_i}\varphi_i^{\{j\}}(z,t)\Bigg] + \sum_{\substack{c,\,s=1\\ c,\,s\neq i,\,j}}^{n}\mu_sk_sp_{sc}\Bigg[z_s\frac{\partial\varphi_c(z,t)}{\partial z_s} + \left(\frac{z_s}{z_c}+1\right)\varphi_c(z,t)+$$

$$+\frac{z_s}{z_c}\left(\varphi_c^{\{s\}}(z,t)+\varphi_c^{\{c\}}(z,t)\right)\Bigg] + \sum_{\substack{k_l=0\\ l=\overline{1,\,n}}}^{\infty}\alpha_i(k)\prod_{l=1}^{n}z_l^{k_l}, \qquad (1)$$

где

$$\varphi_i^{\{j\}}(z,t) = \sum_{\substack{k_l=0,\\ l=\overline{1,n},\, l\neq j}}^{\infty} v_i(k,t)|_{k_j=0}\prod_{\substack{l=1,\\ l\neq j}}^{n} z_l^{k_l}, \quad j=\overline{1,n}.$$

Разработан алгоритм нахождения ожидаемых доходов описанной сети, основанный на использовании соотношения (1), который будет представлен в докладе.

Литература

Колузаева Е. В., Маталыцкий М. А. *Анализ ожидаемых доходов в открытой сети с помощью z-преобразований*//Вестн. ГрГУ. Сер.2. 2009. №1.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧНОГО ИЗГИБА ТОНКОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ

К. С. Курочка (Гомель, Беларусь)

Рассматривается задача моделирования прогибов тонкой трехслойной пластинки из упругопластического материала. При этом предполагается, что отношение характерного размера пластинки в плане к ее толщине лежит в пределах от 10 до 100. Для каждого из слоев примем гипотезы Кирхгофа (*Kirchhoff G. R.*) [1], согласно которым вектора деформаций и напряжений будут иметь по три ненулевых компоненты, т. е.: $\{\varepsilon\}^{\mathrm{T}} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}$, $\{\sigma\}^{\mathrm{T}} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$.

Срединную плоскость заполнителя примем за плоскость XOY. Ось Z направим перпендикулярно плоскости XOY так, чтобы направление совпадало с направлением действия вертикальных сил. Для описания упругопластических свойств материала используем соотношения теории малых упругопластических деформаций [1]. Предположим, что отсутствует сдвиг слоев относительно друг друга, т. е. функция прогиба непрерывна вдоль оси Z. Учитывая соотношения теории малых упругопластических деформаций, выражение для напряжений можно переписать в виде [2]

$$\{\sigma\} = (1 - \omega(\varepsilon_{\text{и}}))[E]\{\varepsilon\},$$

где $\omega(\varepsilon_{\text{и}})$ – функция Ильюшина, $\varepsilon_{\text{и}}$ – интенсивность деформаций.

Будем дискредитировать каждый слой исследуемой пластинки конечными элементами в форме прямоугольников [2]. Воспользовавшись формулами Коши (*Cauchy A. L.*) деформации в тонкой пластинке можно выразить через перемещения с использованием следующих соотношений [2]:

$$\{\varepsilon\} = -z[C][B]^{-1}\{g\},$$

где $[C]$ – матрица дифференцирования функции прогибов, $[B]$ – координатная матрица, $\{g\}$ - вектор узловых перемещений.

Воспользовавшись принципом возможных перемещений для тонкой пластинки [2], можно записать

$$\{\delta g\}\{R\} = \int\limits_0^a \int\limits_0^b \int\limits_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\{\delta g\}[B^{-1}]^{\text{T}}[C]^{\text{T}} z(1 - \omega(\varepsilon_{\text{и}}))[E][C][B^{-1}]\{g\}dxdydz,$$

где a, b – размеры конечного элемента пластинки вдоль осей X и Y соответственно, h – толщина элемента, $\{R\}$ – вектор узловых усилий, символ "δ"означает вариацию.

Представим виртуальную работу внутренних сил треслойной пластинки в виде суммы виртуальных работ внутренних сил каждого слоя. Поскольку, матрица $[B]$ и вектор узловых перемещений $\{g\}$ не зависят от координат, то их можно вынести за знак интеграла. Тогда, проинтегрировав последнее соотношение по z, будем иметь

$$\{R\} = \frac{h_1^3}{12}[B^{-1}]^{\text{T}}[Q][B^{-1}]\{g_1\} + \frac{h_2^3}{12}[B^{-1}]^{\text{T}}[Q][B^{-1}]\{g_2\} + \frac{h_3^3}{12}[B^{-1}]^{\text{T}}[Q][B^{-1}]\{g_3\} + \{R_{\text{д}}\}, \quad (1)$$

где

$$\{R_{\text{д}}\} = \omega(\varepsilon_{\text{и}})(\frac{h_1^3}{12}[B^{-1}]^{\text{T}}[Q][B^{-1}]\{g_1\} + \frac{h_2^3}{12}[B^{-1}]^{\text{T}}[Q][B^{-1}]\{g_2\} + \frac{h_3^3}{12}[B^{-1}]^{\text{T}}[Q][B^{-1}]\{g_3\}),$$

$$[Q] = \int\limits_0^a \int\limits_0^b [C]^{\text{T}}[E][C]dxdy,$$

нижний индекс у вектора перемещений срединной плоскости $\{g\}$ и h обозначает номер слоя.

Воспользовавшись гипотезами Кирхгофа и уравнениями Коши, выразим перемещения на нижней грани первого слоя через перемещения срединной плоскости данного слоя [3]

$$\{g_1^{\text{н}}\} = [L_1]\{g_1\}, \text{откуда } \{g_1\} = [L_1^{-1}]\{g_1^{\text{н}}\}.$$

Аналогично выразим перемещения на верхних и нижних гранях среднего слоя, и на верхней грани нижнего слоя:

$$\{g_2^{\text{в}}\} = [U_2]\{g_2\}, \{g_2^{\text{н}}\} = [L_2]\{g_2\}, \{g_3\} = [U_3^{-1}]\{g_3^{\text{н}}\}.$$

В силу принятых предположений, перемещения на нижней плоскости первого слоя должны совпадать с перемещениями на верхней плоскости второго слоя, а перемещения на верхней плоскости третьего слоя должны совпадать с перемещениями на нижней плоскости второго слоя. Тогда

$$\{g_1\} = [L_1^{-1}][U_2]\{g_2\}, \{g_3\} = [U_3^{-1}][L_2]\{g_2\}.$$

Подставляя найденные перемещения в уравнения (1), получаем систему линейных алгебраических уравнений, многократное решение которой, после учета граничных условий позволит определить напряженно-деформированное состояние трехслойной пластинки из упругпластического материала.

Для проверки адекватности математической модели, верификации алгоритмов и программного обеспечения была рассмотрена задача определения прогибов защемленной по контуру круглой упругопластической трехслойной пластинки. Найденное решение сравнивалось с решением из [1]. Диаметр пластинки был принят равным 12м, толщина – $0,2$м. Пластинка находились под действием равномерно распределенной вертикальной нагрузки интенсивностью $0,1$МПа. Максимальное расхождение решения по предлагаемому алгоритму с решением из [1] не превышает 15%.

Литература

1. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Тарлаковский Д. В. *Теория упругости и пластичности:* учеб. для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

2. Курочка К. С. *Численное моделирование прогибов вязкоупругопластической тонкой пластинки с отверстиями* / К. С. Курочка // Механика машин, механизмов и материалов. 2007. Т. 1, № 1. С. 60–64.

3. Курочка К. С. *Построение математической модели сложной системы неоднородных вязкоупругих дисперсных и сплошных твердых тел* / К. С. Курочка // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2007. №4. - С. 18–31.

КОМБИНАТОРНЫЕ МОДЕЛИ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ В РЕКУРСИВНО-ПОРОЖДАЕМЫХ КЛАССАХ

В. В. Лепин (Минск, Беларусь)

Изучение свойств и классов графов и гиперграфов составляет содержание значительной части работ по теории графов и ее приложениям. Результаты таких исследований применяются при разработке эффективных методов решения задач дискретной оптимизации. Один из подходов в изучении NP-трудных проблем заключается в выделении достаточно обширных классов задач, которые можно как распознать, так и решить за полиномиальное время. Такие задачи часто определяются через некоторое структурное свойство графа $G(I)$, который ассоциируется с задачей I. В период с 1980 по 1990 годы Н. Робертсон и П. Сеймур (Robertson N., Seymour P.) определили следующие графовые инварианты: цепную ширину (pathwidth), древесную ширину (treewidth)