УДК 536.2.01

О.Н. Шабловский

Гомельский государственный технический университет, Беларусь

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ ПРИ ТЕПЛОВОМ ВОЗДЕЙСТВИИ НА БИОЛОГИЧЕСКУЮ ТКАНЬ

АННОТАЦИЯ

Теплообмен в биологической ткани имеет два отличительных признака: отчетливо выражена релаксация теплового потока; функция источника энергии имеет отрицательный наклон $\partial q_\upsilon / \partial T < 0$. В рамках модели волнового теплопереноса решены новые задачи о нелинейных взаимодействиях в системе «биоткань – источник энергии». Установлена связь вида дисперсии волн с амплитудно-частотными свойствами резонатора. Дано аналитическое описание аномального температурного отклика ткани на тепловое воздействие. Изучены закономерности влияния возбуждающего слоя конечной толщины на структуру температурного поля.

1. ВВЕДЕНИЕ

Гиперболическое уравнение теплопроводности, учитывающее конечную скорость $w = (\lambda / c\gamma)^{1/2}$ распространения тепловых возмущений, выводится, как известно, с помощью вариационных принципов:

$$c\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \gamma \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right) = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + q_\upsilon , \qquad (1)$$

$$\lambda, c, \gamma - \mathrm{const}, \; q_\upsilon = q_\upsilon(T,\; x) .$$

Физическое обоснование уравнения (1) изложено в работе [1]. Будем рассматривать процессы, обладающие высокой степенью нестационарности, для которых волновой механизм переноса тепла преобладает над диффузионным: $\gamma\partial / \partial t >> 1$. Тогда (1) принимает вид волнового уравнения с источником энергии:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = w^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + k_\upsilon , \; k_\upsilon = q_\upsilon / (c\gamma) . \qquad (2)$$

Далее будем применять функцию $\tau = T - T^0$, которая определяет отклонение температуры T от ее равновесного значения $T^0 \equiv \mathrm{const}$. В одномерном случае $(\partial / \partial y \equiv 0)$ имеем:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = w^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + k_\upsilon . \qquad (3)$$

В частности, в классе автомодельных решений $\tau = \tau(\xi)$ типа распространяющейся волны $\xi = A_* x + B_* t$, A_*, $B_* - \mathrm{const}$, уравнение (3) представляет динамическую систему с одной степенью свободы:

$$d^2\tau / d\xi^2 = Q(\tau) , \qquad (4)$$

$$k_\upsilon = Q w^2 A_*^2 (M^2 - 1) , \; M^2 = N^2 / w^2 . \qquad (5)$$

Скорость перемещения ξ-линии равна $N = dx / dt = -B_* / A_*$, причем $N^2 \neq w^2$, т.е. ξ — линия не является характеристикой; M^2 есть квадрат теплового числа Маха. По отношению к дозвуковому $(M^2 < 1)$ и сверхзвуковому $(M^2 > 1)$ процессам имеем инверсию: знак функции источника k_υ меняется (при одном и том же Q) на противоположный при переходе «дозвук $\leftrightarrow$ сверхзвук».

Важным элементом рассмотренных далее задач является неподвижный разрыв теплового поля, разделяющий две области. Область-1 это правая полуплоскость $x \geq 0$; область-2 это левая полуплоскость $x \leq 0$. На разрыве $x = 0$ действует внешний для биоткани источник энергии W. На таком разрыве должно быть выполнено динамическое условие совместности [2], являющееся следствием интегрального закона сохранения энергии:

$$W = q_x^{(r)} - q_x^{(l)} , \qquad (6)$$

где W — поверхностная плотность распределения на разрыве притока энергии; q_x — нормальная к разрыву составляющая вектора теплового потока; индексы r, l относятся к правой и левой сторонам разрыва.

Источник энергии $q_\upsilon(T,\; x)$ позволяет моделировать разнообразные физические процессы. В современной литературе наиболее полно представлены задачи теплообмена, для которых $\partial q_\upsilon / \partial T > 0$. Например, в [3, 4] разработана тепловая модель взрывной кристаллизации аморфных пленок, напыленных на подложку: знакопеременный источник $q_\upsilon(T)$ описывает конкуренцию между температурными областями с тепловыделением ($q_\upsilon > 0$) и теплоотдачей ($q_\upsilon < 0$). Теплоперенос в биологической ткани характеризуется отчетливо выраженной релаксацией теплового потока ($\gamma \sim 20$ c), а своеобразие источника q_υ (T, x), отличающее его от объектов неживой природы и техники, заключается в отрицательном наклоне $\partial q_\upsilon / \partial T < 0$ [5]. Это объясняется тем, что такой источник выполняет уравновешивающую роль компенсатора: в области «высоких» температур ($T > T^0$) идет теплоотвод ($q_\upsilon < 0$), в области «низких» температур ($T < T^0$) происходит теплоотделение ($q_\upsilon > 0$) в биоткани. В данной работе рассматривается модель волнового теплопереноса в биологической ткани с отрицательным наклоном функции источника энергии. Наша цель состоит в том, чтобы: 1) построить новые точные решения волнового уравнения теплопереноса; 2) изучить дисперсионные свойства тепловых волн; 3) дать пример точного аналитического описания явления «отрицательной теплоемкости».

2. ВОЛНОВОЙ ТЕПЛОПЕРЕНОС В БИОТКАНИ

2.1. Дисперсия волн

Динамическая система (4) имеет точное решение [6]:

$$Q = A_2 \exp(-\tau) - 2m^2 A_1 \exp(-\tau/2)\,; \qquad (7)$$

$$\tau = \ln[A_1 + 2\overline{\alpha}\cos(m\xi)]^2\,; \qquad (8)$$

$$A = 8m^2\overline{\alpha}^2\,,\ A_1^2 > 4\overline{\alpha}^2\,,\ A_2 = 2m^2 A_1^2 - A\,,$$

где $\overline{\alpha}$, m — произвольные постоянные. В сверхзвуковом случае [см. (5)] источник (7) имеет отрицательный наклон при $A_1 > 0$; решение (8) определяет тепловое поле в конечной окрестности температуры $\tau = \tau_0$, где $Q(\tau = \tau_0) = 0$. Рассмотрим взаимодействие теплового резонатора [7] с системой «биоткань – источник энергии», которая описывается решением (7), (8). На конечном отрезке $x \in [x_1,\ 0]$, $-\infty < x_1 < 0$ находится слой материала (резонатор), обладающий локально-неравновесными тепловыми свойствами; на границе $x = x_1$ периодический по времени тепловой поток $q_1 = q_1(t)$ возбуждает колебания. Допустим, что в результате этого воздействия температура биоткани при $x = 0$ определяется решением (8):

$$\tau(x = 0,\ t) = \ln[A_1 + a\cos(\omega t)]^2\,,$$

где $2\overline{\alpha} = a(\omega)$, $\omega = mB_*$, $A_1^2 > a^2$. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний $a = a(\omega)$ от частоты существенным образом связана с теплофизическими свойствами резонатора. Для материалов с «тепловой памятью» этот вопрос изучен в [8]. Решение (8) определяет тепловой процесс при $x \in [0,\ x_j]$, где $x = 0$ — неподвижная стенка, а правая граница $\xi_j = 0$, $x_j = (-B_*/A_*)t$ подвижна, ее скорость перемещения описывается кинетическим соотношением

$$N_j \equiv N(T_j) = \mu\exp[r(T - T^0)]\,;\ \mu,\ r - \text{const}\,.$$

В данном случае ω — круговая частота, $K = -mA_*$ есть волновое число. Следовательно, дисперсионное соотношение между ω и K имеет вид:

$$\mu K = \omega/(A_1 + a)^{2r}\,. \qquad (9)$$

Здесь учтено, что $N = -B_*/A_* = \omega/K$. Для функции $a = a(\omega)$ возьмем типичную колоколообразную корреляцию между амплитудой и круговой частотой: $a(\omega) = a_1\exp[-p(\omega - \omega_1)^2]$, где a_1, p, ω_1 — положительные и постоянные величины; ω_1 — резонансная частота возбуждающих колебаний. Анализ показывает, что функция $K = K(\omega)$ в (9) имеет один экстремум, который расположен либо в субрезонансной области $\omega = \omega' < \omega_1$ при $r > 0$ либо в сверхрезонансной области $\omega = \omega'' > \omega_1$ при $r < 0$, если

$$A_1 = a[4rp(\omega_1 - \omega) - 1] > 0\,. \qquad (10)$$

В дополнение к (10), условие экстремума в субрезонансном варианте выполняется при выборе частоты ω' из интервала $(\omega_2,\ \omega_3)$, где $0 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_1$, и ω_2, ω_3 — положительные корни квадратного уравнения $2rp\omega^2 - 2rp\omega_1\omega + 1 = 0$, причем $\omega_1^2 rp > 2$. Тип экстремумов многовариантным образом зависит от параметров процесса. Знак производной $dN/d\omega$ совпадает со знаком произведения $\delta_j = (da/d\omega)(dN/dT_j)$, поэтому при $\delta_j < 0$ дисперсия нормальная (отрицательная), а при $\delta_j > 0$ аномальная (положительная). Следовательно, вид дисперсии мультипликативным образом определяется амплитудно-частотными свойствами резонатора и кинетическими свойствами подвижной границы.

2.2. Возбуждающий слой конечной толщины

Непосредственной подстановкой можно проверить, что уравнение (3) имеет точное решение

$$k_\upsilon = -\mathrm{sh}\tau\,,\ \exp\tau = \left[\frac{\sin(t/k) - (x/kw)}{\sin(t/k) + (x/kw)}\right]^2, \qquad (11)$$

которое определено при $x^2 \ge x_1^2 = D_{11}(kw)^2$, $D_{11} > 1$. Это значит, что функция (11) представляет температурное поле по обе стороны возбуждающего слоя, который занимает отрезок $[-x_1,\ x_1]$. При заданной частоте воздействия k^{-1} толщина слоя $2x_1$ является параметром нелинейности данного процесса. Например, при $D_{11} = 1 + \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 > 0$ малое число, резко увеличивается температурный интервал, в котором изменяется функция источника, т.е. проявляется сильная нелинейность гиперболического синуса. При физическом истолковании решения (11) следует принять границы $x = \pm x_1$ за разрывы вида (6), на которых действуют возбуждающие источники энергии $W^\pm(t)$. При каждом фиксированном x вне возбуждающего слоя источник энергии генерирует нелинейные колебания около изотермы $T = T^0$.

2.3. «Отрицательная теплоемкость»

Неклассическое явление «отрицательная теплоемкость» (ОТ) представляет собой аномальный температурный отклик среды на тепловое воздействие: подвод/отвод тепла вызывает снижение/рост температуры. Обзор экспериментальных и теоретических работ по этой проблеме приводится в [9]. Некоторые нелинейно-волновые аспекты явления ОТ представлены в [10].

Рассмотрим уравнение (3) в характеристических переменных $\alpha = x' + t$, $\beta = x' - t$, $x' = x / w$, применяя источник энергии

$$k_\upsilon(\tau,\ \beta) = \frac{6D_1}{\sqrt{\tau_1}}\frac{\dot\varphi}{\varphi}(\tau - \tau_1)\left(\frac{\tau_1}{3} - \tau\right). \qquad (12)$$

В этом случае удается получить точное решение

$$\tau(\alpha,\ \beta) = \tau_1(\varphi E - 1)^2 / (\varphi E + 1)^2,\ E = \exp(g_1\alpha), \quad (13)$$

$$\tau_1 = f / D_1 = f^2 / g_1^2 > 0,\ g_1 = \sqrt{fD_1},\ x' \in (-\infty, \infty).$$

Здесь $\varphi = \varphi(\beta)$ — произвольная функция; $\dot\varphi = d\varphi / d\beta$; f, D_1 — произвольные постоянные. Источник энергии (12) есть полином второй степени по отношению к аргументу τ и обращается в ноль в двух температурных точках: $\tau = \tau_1$, $\tau = \tau_2 = \tau_1 / 3$. Физическая интерпретация данного решения состоит в следующем. В начальном состоянии $(t = 0)$ при $x = 0$ находится слабый разрыв теплового поля. Этот разрыв расщепляется на две волны $\alpha = 0$, $\beta = 0$, распространяющиеся влево $(x \le 0)$ и вправо $(x \ge 0)$ вдоль оси x. Перед волной $x' = t$, бегущей вправо, температурный фон имеет вид

$$\tau_r(x') = \tau_1[\varphi(0)\exp(2g_1x') - 1]^2 / [\varphi(0)\exp(2g_1x') + 1]^2.$$

Перед волной $x' = -t$, бегущей влево, неоднородный температурный фон

$$\tau_l(x') = \tau_1[\varphi(2x') - 1]^2 / [\varphi(2x') + 1]^2,\ x' \le 0$$

определяется выбором произвольной аналитической функции $\varphi(2x')$. Значит, температурное поле (13) содержит две волны, разбегающиеся в противоположных друг другу направлениях. Явная зависимость источника k_υ от волновой координаты β означает учет влияния начальной неоднородности теплового поля при $x \le 0$ на энергообмен в системе «ткань – источник энергии». Обсудим важный случай $\varphi = \varphi_1\exp(r\beta)$, $\varphi_1 \equiv \text{const}$, для которого $\dot\varphi / \varphi = r \equiv \text{const}$, $\partial k_\upsilon / \partial\beta \equiv 0$, и источник (12) зависит только от температуры. На фронте волны, бегущей вправо, имеем

$$\tau^+(t) = \tau_1[\varphi_1\exp(2g_1t) - 1]^2 / [\varphi_1\exp(2g_1t) + 1]^2. \quad (14)$$

Пусть начальное значение $\tau^+(t = 0)$ расположено между температурными точками 0 и τ_2: $0 < \tau^+(t = 0) < \tau_2 = \tau_1 / 3$. Учтем, что $\tau^+(t \to \infty) = \tau_1$, и тогда получаем монотонный рост функции $\tau^+(t)$ для двух вариантов: 1) $g_1 > 0$, $1 < \varphi_1 < (2 + \sqrt{3})$; 2) $g_1 < 0$, $(2 - \sqrt{3}) < \varphi_1 < 1$. Следовательно, в конечной окрестности $\tau = \tau_2$ имеем ОТ-ситуацию: $d\tau^+ / dt > 0$, $k_\upsilon(\tau^+) < 0$. Для волны, бегущей влево, имеем выражение $\tau^-(t)$, которое получается из (14) заменой $(-g_1) \to r$. Возьмем $0 < \tau^-(t = 0) < \tau_2$, и тогда функция $\tau^-(t)$ является монотонно возрастающей для двух вариантов: 1) $r < 0$, $1 < \varphi_1 < (2 + \sqrt{3})$; 2) $r > 0$, $(2 - \sqrt{3}) < \varphi_1 < 1$. Здесь $\tau^-(t \to \infty) = \tau_1$. В окрестности $\tau = \tau_2$ наблюдается ОТ-ситуация: $d\tau^- / dt > 0$, $k_\upsilon(\tau^-) < 0$.

Следует обратить внимание на направление выпуклости параболы (12). При $\tau = \tau_2$ происходит переключение режимов температурного отклика. Если $d^2k_\upsilon / d\tau^2 < 0$ [ветви параболы обращены вниз, причем $k_\upsilon(\tau = 0) < 0$ и $dk_\upsilon / d\tau < 0$ в окрестности $\tau = \tau_1$], то имеем переход «аномальный отклик – нормальный отклик». Если $d^2k_\upsilon / d\tau^2 > 0$ [ветви параболы обращены вверх, причем $k_\upsilon(\tau = 0) > 0$ и $dk_\upsilon / d\tau < 0$ в окрестности $\tau = \tau_2$], то имеем переключение «нормальный отклик – аномальный отклик».

3. БЕГУЩАЯ ВОЛНА НА ГРАНИЦЕ ВОЗБУЖДАЮЩЕГО СЛОЯ

Двумерное волновое уравнение (2) запишем в виде

$$\frac{\partial^2T}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2T}{\partial\beta^2} = -\frac{k_\upsilon}{w^2 - b^2}, \qquad (15)$$

где $T = T(\eta,\ \beta)$, $\eta = x(w^2 - b^2)^{1/2} / w$, $\beta = y + bt$, $b \equiv \text{const}$. Далее мы изучаем дозвуковой вариант $b^2 < w^2$. Рассмотрим класс температурных полей, для которого

$$T = T(\xi),\ \xi = \exp(\delta_1\eta)\sin(\delta_1\beta),\ \delta_1 \equiv \text{const}, \quad (16)$$

$$q_\upsilon / (c\gamma) \equiv k_\upsilon(T,\ x) = \widetilde{k}_\upsilon(T)\exp(2\delta x), \quad (17)$$

$$\delta = \delta_1(w^2 - b^2)^{1/2} / w,$$

причем δ_1 — свободный параметр; $\delta_1\eta = \delta x$. Здесь, в п. 3, для единообразия математических формул применяем символы ξ, β в смысловом значении, отличающемся от пп. 1, 2. Очевидно, это не приводит к путанице с содержанием предыдущего текста. Итогом аналитических преобразований является динамическая система с одной степенью свободы:

$$d^2\tau / d\xi^2 = Q(\tau) \equiv -\widetilde{k}_\upsilon(\tau) / [\delta_1^2(w^2 - b^2)]. \quad (18)$$

Для теплофизической интерпретации решения (16), (17) следует принять линию $x = 0$ за разрыв вида (6), на котором действует возбуждающий источник $W(\beta)$, зависящий от волновой координаты.

Если $\widetilde{k}_{\upsilon}(\tau) = k_{\upsilon}^{(1)}\tau$, $k_{\upsilon}^{(1)} < 0$, то уравнение (18) имеет точное решение

$$\tau = A_1 \exp(\varphi\xi^{+}) + A_2 \exp(-\varphi\xi^{+}) +$$

$$+ B_1 \exp(\varphi\xi^{-}) + B_2 \exp(-\varphi\xi^{-}), \qquad (19)$$

$$\xi^{\pm} = \exp(\delta x)\sin[\delta_1(y \pm bt)],$$

где $\varphi^2 = -k_{\upsilon}^{(1)}/(\delta^2 w^2)$; A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные. В структуре этого решения учтено, что константа b входит в формулы (16) — (18) четным образом (только во второй степени). Выражение (19) представляет собой суперпозицию двух решений, содержащих две волны, распространяющиеся в противоположных друг другу направлениях. Каждое слагаемое в (19) является периодическим по волновой координате. Возбуждающий источник W генерирует две встречные волны $\beta = y \pm bt$.

Теперь рассмотрим нелинейный источник $k_{\upsilon}(\tau) = -k_{\upsilon}^{(2)}\mathrm{sh}\tau$, $k_{\upsilon}^{(2)} > 0$, зависящий только от температуры. После преобразования растяжения получаем из (15) уравнение Пуассона с правой частью $\mathrm{sh}\tau$. Для этого уравнения возьмем известное решение (см. [11] и указанную там библиографию) и запишем его в виде:

$$\tau = \ln\left(\frac{1+H}{1-H}\right)^2, \; H = \sqrt{\frac{m-1}{m}}\,\frac{\sin(\beta_1\sqrt{-m})}{\mathrm{ch}(\eta_1\sqrt{1-\mathrm{m}})}, \qquad (20)$$

$$\eta_1 = \eta/\Delta, \; \beta_1 = \beta/\Delta, \; \Delta^2 = (w^2 - b^2)/k_{\upsilon}^{(2)}, \; m < 0.$$

Это решение имеет физический смысл при $H^2 < 1$, поэтому должно быть выполнено неравенство

$$0 < \sqrt{(m-1)/m}\,/\,\mathrm{ch}(\eta_1\sqrt{1-m}) \le D_{12} < 1. \qquad (21)$$

Так же, как и в п. 2.2, рассмотрим возбуждающий слой конечной толщины, который занимает полосу $\left\{x \in [-x_1,\; x_1],\; y \in (-\infty, \infty)\right\}$, где граничное значение $|x_1|$ удовлетворяет оценке (21) и коррелирует с априорно задаваемой константой $D_{12} \in (0,\,1)$. Формула (20) определяет температурное поле вне слоя, в правой $(x \ge x_1)$ и левой $[x \le (-x_1)]$ полуплоскостях. Границы слоя $x = \pm x_1$ представляют собой разрывы вида (6). Возбуждающие источники энергии $W^{\pm}(\beta)$ есть периодические функции волновой координаты.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Установлены условия возникновения положительной и отрицательной дисперсии тепловых волн в системе «биоткань — источник энергии». Получено новое точное решение (12), (13) волнового уравнения с источником, обладающим квадратичной нелинейностью по температуре. На этой основе изучена «отрицательная теплоемкость» ткани, находящейся в неравновесном состоянии. Построены температурные поля (11), (20), содержащие в своей структуре возбуждающий слой конечной толщины.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

ОТ – сокращенное наименование термина «отрицательная теплоемкость»;
T – температура К;
$\boldsymbol{q}\,(q_x, q_y)$ – удельный тепловой поток, Вт/м²;
c – объемная теплоемкость, Дж/(м³·град);
λ – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·град);
γ – время релаксации теплового потока, с;
x, y – прямоугольные декартовы координаты, м;
t – время, с;
w – скорость тепловой волны, м/с;
q_{υ} – мощность внутренних источников тепла, Вт/м³.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Никитенко Н.И.** Проблемы радиационной теории тепло- и массопереноса в твердых и жидких средах // ИФЖ. 2000. Т.73. № 4. С. 851–859.
2. **Седов Л.И**. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973. 536 с.
3. **Shablovsky O.N.** A Thermal Model of Periodic Crystallization // Crystallography Reports. 2005. Vol. 50. Suppl. 1. P. 62–67.
4. **Шабловский О.Н., Кроль Д.Г.** Неравновесные тепловые структуры в средах с источниками энергии. Гомель: ГГТУ им. П.О. Сухого. 2013. 208 с.
5. **Pennes H.H.** Analysis of tissue and arterial temperature in the resting human forearm // J.Appl. Physiol. 1948. Vol. 1. P. 93–122.
6. **Шабловский О.Н.** Точные решения волновых уравнений с нелинейными источниками // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем. Вып. 14. М.: Янус-К, 2011. С. 382–391.
7. **Шабловский О.Н.** Релаксационный теплоперенос в нелинейных средах. Гомель: ГГТУ им. П.О. Сухого. 2003. 382 с.
8. **Шабловский О.Н., Концевой И.А.** Нелинейные свойства вынужденных колебаний локально-неравновесного теплового поля // Тепловые процессы в технике. 2010. Т. 2. № 6. С. 267–274.
9. **Ингель Л.Х.** «Отрицательная теплоемкость» стратифицированных жидкостей // УФН. 2002. Т. 172. № 6. С. 691–699.
10. **Шабловский О.Н.** «Отрицательная теплоемкость» в простой тепловой волне // Теплопроводность, теплоизоляция: Тр. Четвертой Российской национ. конф. по теплообмену. М.: Издательский дом МЭИ. 2006. Т. 7. С. 359–361.
11. **Капцов О.В.** Некоторые классы плоских вихревых течений идеальной жидкости // Журнал ПМТФ. 1989. № 1. С. 109–117.