Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 6

МЕХАНИКА

В. В. СОЛОДОВНИКОВ

КРИТЕРИЙ КАЧЕСТВА РЕГУЛИРОВАНИЯ

(Представлено академиком В. С. Кулебакиным 22 III 1948)

В работе [1] нами было предложено судить о качестве линейных систем регулирования по виду их вещественных частотных характеристик. Цель настоящей заметки — дать общее решение задачи, которая была поставлена в [1] и может быть сформулирована следующим образом.

Предположим, что изменение во времени отклонения δ регулируемой величины от требуемого закона изменения может быть представлено в виде интеграла

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{J(z)}{z} e^{zt} dz, \tag{1}$$

в котором интегрирование ведется вдоль мнимой оси и полукруга малого радиуса, обходящего справа полюс в начале координат, причем функция $J(z)$ может быть определена из дифференциальных уравнений системы регулирования и из заданных начальных условий [2].

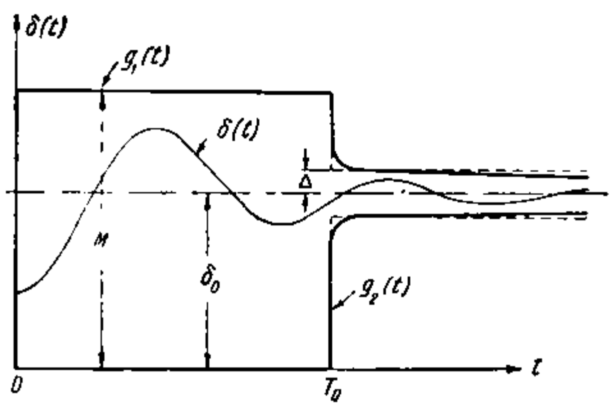

Рис. 1

Введем в рассмотрение обобщенную вещественную $X(\omega)$ и мнимую $Y(\omega)$ частотные характеристики системы регулирования, которые определяются, соответственно, как вещественная и мнимая части выражения $J(j\omega)$, т. е.

$$J(j\omega) = X(\omega) + iY(\omega), \qquad j = \sqrt{-1}. \tag{2}$$

Каковы необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять функции $X(\omega)$ и $Y(\omega)$, для того чтобы функция $\delta(t)$, определяемая интегралом (1), не выходила из пределов области допустимых значений, изображенной на рис. 1, где через M обозначено максимальное допустимое отклонение, через T_0 — допустимая продолжительность регулирования и через δ_0 — статическое отклонение, т. е. другими словами, чтобы функция $\delta(t)$ удовлетворяла условиям допустимого максимального и заданного статического отклонения и условию допустимой продолжительности регулирования?

Рассмотрим верхнюю и нижнюю границы области допустимых значений (рис. 1) и введем в рассмотрение, например, следующие функции времени

$$g_1(t)=\begin{cases} M, & 0<t<T_0,\\ M-[M'-(\delta_0+\Delta)](1-e^{-C(t-T_0)})-\Delta(1-e^{-\alpha(t-T_0)}), & T_0<t<\infty,\\ 0, & -\infty<t<0;\end{cases}$$

$$g_2(t)=\begin{cases} (\delta_0-\Delta)(1-e^{-C(t-t_0)})+\Delta(1-e^{-\alpha(t-T_0)}), & T_0<t<\infty,\\ 0, & -\infty<t<T_0.\end{cases} \tag{3}$$

При достаточно большом значении постоянной C и достаточно малом значении постоянной α кривые, соответствующие функциям времени $g_1(t)$ и $g_2(t)$, будут сколь угодно мало отличаться соответственно от верхней и нижней границ области допустимых значений, причем при $t\to\infty$

$$\lim_{t\to\infty} g_1(t)=\lim_{t\to\infty} g_2(t)=\delta_0. \tag{4}$$

Пусть

$$\int_0^\infty e^{-zt}g_1(t)\,dt=\frac{\mu_1(z)}{z},\qquad \int_0^\infty e^{-zt}g_2(t)\,dt=\frac{\mu_2(z)}{z}. \tag{5}$$

Подставляя (3) в (5), получим

$$\mu_1(z)=M-\frac{Ce^{-zT_0}[M-(\delta_0+\Delta)]}{z+C}-\frac{\Delta\alpha e^{-zT_0}}{z+\alpha},$$

$$\mu_2(z)=\frac{Ce^{-zT_0}(\delta_0-\Delta)}{z+C}+\frac{\alpha\Delta e^{-zT_0}}{z+\alpha}. \tag{6}$$

Очевидно, что для того чтобы функция $\delta(t)$ удовлетворяла условиям допустимого статического отклонения, допустимой продолжительности и допустимого максимального отклонения, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялось неравенство

$$g_2(t)\leqslant\delta(t)\leqslant g_1(t)\quad \text{при всех } t>0. \tag{7}$$

Введем теперь в рассмотрение функции

$$\varepsilon_1(t)=g_1(t)-\delta(t),\qquad \varepsilon_2(t)=\delta(t)-g_2(t). \tag{8}$$

Очевидно, что неравенство (7) эквивалентно неравенствам:

$$\varepsilon_1(t)\geqslant 0,\quad \varepsilon_2(t)\geqslant 0\quad \text{при всех } t>0. \tag{9}$$

Так как $\int_0^\infty |\varepsilon_1(t)|\,dt$ и $\int_0^\infty |\varepsilon_2(t)|\,dt$ существуют, то функции $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ могут быть представлены в виде интегралов Фурье

$$\varepsilon_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Upsilon_1(\omega)\, e^{j\omega t}\,d\omega, \qquad \varepsilon_2(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Upsilon_2(\omega)\, e^{j\omega t}\,d\omega, \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned} \Upsilon_1(\omega)&=\frac{\mu_1(j\omega)-J(j\omega)}{j\omega}=\int_0^\infty \varepsilon_1(t)\, e^{-j\omega t}dt,\\ \Upsilon_2(\omega)&=\frac{J(j\omega)-\mu_2(j\omega)}{j\omega}=\int_0^\infty \varepsilon_2(t)\, e^{-j\omega t}\,dt. \end{aligned} \tag{11}$$

Отделим в выражениях μ_1, μ_2 вещественные части η_1, η_2 от мнимых $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, т. е. положим, что

$$\mu_1(j\omega)=\eta_1(\omega)+j\varkappa_1(\omega), \qquad \mu_2(j\omega)=\eta_2(\omega)+j\varkappa_2(\omega). \tag{12}$$

Обозначим через a_1, a_2 вещественные, а через b_1, b_2 — мнимые части выражений $\Upsilon_1(\omega)$, $\Upsilon_2(\omega)$, т. е.

$$\Upsilon_1(\omega)=a_1(\omega)+ib_1(\omega), \qquad \Upsilon_2(\omega)=a_2(\omega)+ib_2(\omega), \tag{13}$$

где, согласно (2), (11) и (12):

$$a_1(\omega)=\frac{\varkappa_1(\omega)-Y(\omega)}{\omega}, \qquad b_1(\omega)=-\frac{\eta_1(\omega)-X(\omega)}{\omega}; \tag{14}$$

$$a_2(\omega)=\frac{Y(\omega)-\varkappa_2(\omega)}{\omega}, \qquad b_2(\omega)=-\frac{X(\omega)-\eta_2(\omega)}{\omega}. \tag{15}$$

Функции $a_1(\omega)$, $a_2(\omega)$ мы назовем разностными вещественными частотными характеристиками, а функции $b_1(\omega)$, $b_2(\omega)$ — разностными мнимыми частотными характеристиками.

Итак, согласно (9) и (10), поставленная задача сведена нами к решению следующего вопроса.

Какими свойствами должна обладать функция $\Upsilon(\omega)$ для того, чтобы функция $\varepsilon(t)$, определяемая через $\Upsilon(\omega)$ при помощи преобразования Фурье (10), была неотрицательной функцией?

Ответ на этот вопрос дается следующей известной теоремой ([3,4]).

Пусть $a(\omega)$ и $b(\omega)$ — вещественные, интегрируемые и ограниченные функции и пусть

$$\Upsilon(\omega)=a(\omega)+jb(\omega),$$

причем интеграл (10) существует.

Тогда, если функция $\Upsilon(\omega)$ положительно-определенна, то $\varepsilon(t)\geqslant 0$ для всех вещественных значений t.

Справедлива также и обратная теорема.

Таким образом, мы можем сформулировать следующий критерий качества регулирования (точнее, условий допустимого статического отклонения, допустимого максимального отклонения и допустимой продолжительности регулирования):

Для того чтобы устойчивая система регулирования удовлетворяла условиям качества регулирования, необходимо и достаточно, чтобы функции $\Upsilon_1(\omega)$, $\Upsilon_2(\omega)$, вещественными частями которых являются разностные вещественные частотные характеристики $a_1(\omega)$, $a_2(\omega)$, а мнимыми частями — разностные мнимые частотные характеристики $b_1(\omega)$, $b_2(\omega)$, были положительно-определенны.

Поступило
30 XII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Солодовников, Изв. АН СССР, ОТН, 12, 1179 (1945). [2] В. В. Солодовников, Автоматика и телемеханика, 8, 2, 65 (1947). [3] S. Bochner, Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig, 1932. [4] M. Mathias, Math. Z., 16 103 (1923).