Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 6

МАТЕМАТИКА

П. Б. ФРУМКИН

К ТЕОРЕМЕ Д. Ф. ЕГОРОВА ОБ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЯХ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 22 III 1948)

Г. Толстов (¹) построил пример, из которого следует, что теорему Д. Ф. Егорова об измеримых функциях нельзя распространить на случай непрерывного параметра.

Точнее говоря, если поставить вопрос: можно ли всегда для функции $f(t, s)$ при фиксированном t измеримой по s (на множестве E значений s) и такой, что $\lim\limits_{t\to t_0} f(t, s)=f(t_0, s)$ почти везде, по $\delta>0$ найти измеримое множество E_δ, $E_\delta \subset E$ и $mE_\delta > mE-\delta$, на котором при $t\to t_0$ $f(t, s)\to f(t_0, s)$ равномерно относительно s, то ответ на этот вопрос следует дать отрицательный.

Ниже будет показано, что если при рассмотрении $f(t, s)$ при фиксированном t пренебрегать множеством меры нуль, то теорема Егорова остается верной. Точнее, имеет место

Теорема 1. *Пусть $f(t, s)$ при фиксированном t почти везде конечная и измеримая по s функция, заданная в квадрате $0\leqslant t\leqslant 1$, $0\leqslant s\leqslant 1$, и $\lim\limits_{t\to t_0} f(t, s)\to f(t_0, s)$ почти везде. Тогда по наперед заданному $\delta_1>0$ найдется множество E_{δ_1}, для которого $mE_{\delta_1}>1-\delta_1$ и такое, что по $\varepsilon>0$ может быть так указано $\delta>0$, что при $|t-t_0|<\delta$ неравенство*

$$|f(t, s)-f(t_0, s)|<\varepsilon$$

имеет место при фиксированном t для всех значений $s\in E_{\delta_1}$, за исключением множества меры нуль (зависящего от t).

Мы получим это предложение как следствие теоремы, являющейся обобщением теоремы Егорова для непрерывного параметра в пространстве L^p, которая в свою очередь вытекает из некоторого общего предложения об абстрактных функциях.

Рассмотрим абстрактную точечно непрерывную функцию $x(t)$ вещественного аргумента t с значениями в линейном полуупорядоченном пространстве X (²,³):

$$x(t_n)\to x(t_0) \text{ при } t_n\to t_0. \tag{1}$$

Если определить непрерывность $x(t)$ при $t=t_0$ еще следующим образом: $x(t)$ непрерывна при $t=t_0$, если существует такой элемент $x_0\in X$, что по заданному $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что имеет место неравенство

$$|x(t)-x(t_0)|<\varepsilon x_0 \text{ при } |t-t_0|<\delta,$$

то легко показать эквивалентность этих определений в пространстве типа K_6^+ Л. В. Канторовича ([3]).

Действительно, пусть выполняется (1). Рассмотрим множества

$$E_m = \{|x(t) - x(t_0)|\}, \text{ где } |t - t_0| < 2^{-m} \ (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Пусть $\xi_m = \sup E_m$. Очевидно, ξ_m положительны и не возрастают с возрастанием m. Существует такое m_0, что $\xi_{m_0} < +\infty$.

В самом деле, если допустить обратное, то согласно усиленной аксиоме VI (([2]), стр. 138) найдутся конечные подмножества $E'_m \subset E_m$, для которых

$$\sup_m \{\sup [E'_m]\} = +\infty. \qquad (*)$$

Если элементы всех множеств E'_m расположить в строку и затем перенумеровать их, получим последовательность

$$x(t_1), \ x(t_2), \ldots, \ x(t_n), \ldots,$$

причем, очевидно, $t_n \to t_0$; и, вследствие непрерывности $x(t)$ при $t \to t_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} |x(t_n) - x(t_0)| = 0$, что противоречит $(*)$.

Таким образом, $\xi_{m_0} \geqslant \xi_{m_0+1} \geqslant \ldots$, и все эти элементы конечны. Положим

$$\lim_{m\to\infty} \xi_m = \lim_{m\to\infty} \{\sup E_m\} = \xi.$$

По аксиоме VI (([2]), стр. 138) существуют конечные подмножества $E'_m \subset E_m$, для которых $\lim\limits_{m\to\infty} \{\sup E'_m\} = \xi$. Расположив элементы всех множеств E'_m в строку и снова воспользовавшись непрерывностью функции $x(t)$ при $t = t_0$, найдем, что $\xi = 0$, т. е. $\lim\limits_{m\to\infty} \xi_m = 0$.

По теореме Л. В. Канторовича (([2]), стр. 142) существует такой элемент $x_0 \in X$, что

$$|\xi_m| < \varepsilon x_0 \text{ для } m > N_\varepsilon.$$

Тогда x_0 и есть искомый элемент, о котором идет речь во втором определении непрерывности.

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$; найдется такое N_ε, что для $m > N_\varepsilon$

$$\sup_{|t-t_0| < 2^{-m}} \{|x(t) - x(t_0)|\} = \xi_m < \varepsilon x_0$$

и, следовательно,

$$|x(t) - x(t_0)| < \varepsilon x_0, \text{ если } |t - t_0| < \delta, \text{ где } \delta < 2^{-m}.$$

Обратное утверждение очевидно.

Теорема 2. *Пусть функция $f(t,s)$ задана в квадрате $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant s \leqslant 1$ и удовлетворяет следующим условиям:*

1) $f(t, s) \in L^p$ $(p \geqslant 1)$ *при фиксированном* t;

2) $f(t_n, s) \to f(t_0, s)$ *при* $t_n \to t_0$ *для почти всех* s;

3) $\sup\limits_t f(t, s) \in L^p$.

Тогда при $\delta_1 > 0$ существует такое измеримое множество E_{δ_1}, $mE_{\delta_1} > 1 - \delta_1$, что по заданному $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что имеет место неравенство

$$\sup_{s \in E_{\delta_1}}{}^{*} \; | f(t, s) - f(t_0, s) | < \varepsilon \; ^{*} \quad \text{для } | t - t_0 | < \delta,$$

Действительно, функции $f(t, s)$, о которой идет речь в теореме, отвечает абстрактная непрерывная при $t \to t_0$ функция $x(t)$ с значениями в L^p. На основании доказанной равносильности определений непрерывности функции $x(t)$ можно утверждать существование такого элемента $\varphi_0 \in L^p$, что справедливо неравенство

$$| x(t) - x(t_0) | < \varepsilon\varphi_0 \text{ для } | t - t_0 | < \delta,$$

т. е. $| f(t, s) - f(t_0, s) | < \varepsilon\varphi_0(s)$ почти везде при $| t - t_0 | < \delta$ или $\dfrac{\sup^{*} | f(t, s) - f(t_0, s) |}{\varphi_0(s)} < \varepsilon$ в промежутке $[0, 1]$.

Положим $E_N = E(\, | \varphi_0(s) | < N)$. Если взять N достаточно большим, то $mE_N > 1 - \delta_1$, и на E_N имеет место неравенство

$$\frac{\sup^{*} | f(t, s) - f(t_0, s) |}{N} < \varepsilon,$$

что и дает нужное неравенство, так как вместо ε можно было взять с самого начала ε / N.

Доказанная теорема есть обобщение теоремы Д. Ф. Егорова для непрерывного параметра в пространстве L^p.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Применяя к функции $f(t, s)$ какую-либо операцию преобразования в ограниченную функцию, например, переходя к

$$f_1(t, s) = \operatorname{arc\,tg} | f(t, s) - f(t_0, s) | ,$$

получим ограниченную измеримую функцию, принадлежащую L^p и удовлетворяющую условиям теоремы 2.

Согласно этой теореме, существует множество E_{δ_1} меры сколь угодно близкой к единице, на котором

$$\sup{}^{*} \operatorname{arc\,tg} | f(t, s) - f(t_0, s) | < \varepsilon \text{ для } s \in E_{\delta_1} \text{ при } | t - t_0 | < \delta$$

и, следовательно,

$$| f(t, s) - f(t_0, s) | < \operatorname{tg} \varepsilon$$

почти везде на E_{δ_1}, если $| t - t_0 | < \delta$.

Ленинградский институт
авиационного приборостроения

Поступило
17 III 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Толстов, ДАН, 22, № 6 (1939). [2] Л. В. Канторович, Матем. сб. 2 (44), в. 1 (1937). [3] Л. В. Канторович, Матем. сб., 7 (49), в. 2 (1940).

* $\sup\limits_{s \in E_{\delta_1}}{}^{*}$ означает, что берется supremum по s для $s \in E_{\delta_1}$ с пренебрежением множеством значений s меры нуль.