Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 6

МАТЕМАТИКА

Ю. Л. РАБИНОВИЧ

ФОРМУЛЫ ОБРАЩЕНИЯ ДВУХ ВИДОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 18 III 1948)

Пусть $f(z)$ — многозначная аналитическая функция экспоненциального типа, которая в некоторой окрестности G_f точки $z=\infty$ не имеет никаких других особых точек, кроме $z=\infty$.

Пусть $K(\varphi)$ — опорная функция наименьшей выпуклой оболочки Σf особых точек $f(z)$, а $A(\varphi)$ — индикатриса роста [1], т. е. $A(\varphi)=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{\log|f(z_0+re^{i\varphi})|}{r}$, если луч $z=z_0+re^{i\varphi}$ содержится в G_f.

Опорные полуплоскости Π_φ контура Σf образуются точками $z=\rho e^{i\theta}$, удовлетворяющими условию

$$\rho\cos(\theta-\varphi)>K(\varphi).$$

Полуплоскости P_φ, определяемые условием $\rho\cos(\theta+\varphi)+A(\varphi)<0$, образуют окрестность K_f точки $\zeta=\infty$, обладающую тем свойством, что для каждой точки ζ, лежащей внутри K_f, существуют направления φ на плоскости $z=re^{i\varphi}$, вдоль которых функция $f_\zeta(z)=e^{\zeta z}f(z)$ экспоненциально стремится к нулю, когда $z\to\infty$ вдоль луча $z=z_0+re^{i\varphi}$. Выпуклый контур S_f, огибаемый полуплоскостями P_φ, называется диаграммой роста [1] $f(z)$.

Обозначим через $\tilde f(z)$ смежную с $f(z)$ ветвь данной многозначной функции, в которую переходит начальная ветвь $f(z)$ после обхода в положительном направлении вокруг контура Σf.

Функции $f(z)$ мы подвергаем двум интегральным преобразованиям, которые мы называем **преобразованиями Лапласа первого и второго рода** и определяем так: обозначим через $\int\limits_{z_0 l_0} e^{-z\zeta}f(\zeta)d\zeta$ интеграл, взятый по лучу $\zeta=z_0+\rho e^{i\theta}$, лежащему в области G_f, и сходящийся, если $z=re^{i\varphi}$ лежит в полуплоскости P_θ^*: $r\cos(\varphi+\theta)>A_f(\theta)$. Этот интеграл представляет в полуплоскости P_θ^* элемент функции $f_1(z)$. Если угловая область $\theta_1<\arg(\zeta-z_0)<\theta_2$, где $\theta_2-\theta_1>\pi$, не содержит особых точек $f(\zeta)$, то, вращая луч z_0l_0 в этой угловой области, мы аналитически продолжаем $f_1(z)$ на частично двулистную область $\overset{*}{K}{}_{\theta_1}^{\theta_2}$, покрываемую соответствующими полуплоскостями P_θ^*. Мы пишем: $f_1(z)=\int\limits_{z_0}^{\infty}e^{-z\zeta}f(\zeta)\,d\zeta$ и называем этот интеграл **интегралом Лапласа первого рода**.

Если z содержится в общей части полуплоскостей $P^*_{\theta_2}$ и $P^*_{\theta_1}$, то интеграл $\tilde{f}_1(z) = \int\limits_{z_0 l_{\theta_2}}^{\infty} e^{-z\zeta} f(\zeta)\, d\zeta$ дает ветвь, смежную с ветвью $f_1(z) = \int\limits_{z_0 l_{\theta_1}}^{\infty} e^{-z\zeta} f(\zeta)\, d\zeta.$

Пусть $z_0 C^+ z_0$ — контур, выходящий из z_0 на начальном листе римановой поверхности $f(\zeta)$, окружающий в положительном направлении оболочку особых точек и возвращающийся к z_0 на смежном листе. Формула

$$\tilde{f}_1(z) = \int\limits_{z_0 C^+ z_0} e^{-z\zeta} f(\zeta)\, d\zeta + \int\limits_{z_0 l_{\theta_1}}^{\infty} e^{-z\zeta} f(\zeta)\, d\zeta$$

дает аналитическое продолжение $f_1(z)$ на $P^*_{\theta_1 + 2\pi}$.

Обозначим через $\Gamma^{(+)}_{\theta_1} = \infty\, l_{\theta_1} z_0 C^+ z_0 l_{\theta_1} \infty$ петлю, выходящую из $\zeta = \infty$ и возвращающуюся к этой точке по направлению θ_1 после обхода в положительном направлении вокруг контура Σf.

Тогда

$$\tilde{f}_1(z) - f_1(z) = \int\limits_{\Gamma^{(+)}_{\theta_1}} e^{-z\zeta} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Интеграл $\int\limits_{\Gamma^{(+)}_{\theta_1}}$ не зависит от z_0 и сходится в полуплоскости $r\cos(\varphi + \theta_1) > A_{\tilde{f} - f}(\theta_1)$. Изменяя θ_1, мы продолжаем функцию $f_2^*(z) = \int\limits_{\Gamma^{(+)}} e^{-z\zeta} f(\zeta)\, d\zeta$ на всю область K^* и называем $f_2^*(z)$ **интегралом Лапласа второго рода**.

Рассмотрим функции

$$f_1(\zeta) = \int\limits_{z_0}^{\infty} e^{-\zeta\zeta'} f(\zeta')\, d\zeta', \qquad F(z) = \int\limits_{\Gamma^-} e^{z\zeta} f_1(\zeta)\, d\zeta.$$

Так как $K_F(\varphi) \leqslant A_{\tilde{f}_1 - f_1}(\pi - \varphi) = A_{f_2^*}(\pi - \varphi) < K_f(\varphi)$, то интеграл $F(z)$ сходится всюду вне оболочки Σf особых точек функции $f(z)$.

Пусть угловая область $\theta_1' \leqslant \arg(\zeta' - z_0) \leqslant \theta_2'$, где $\theta_2' - \theta_1' < \pi$, не содержит особых точек $f(\zeta')$. Возьмем на плоскости $\zeta = \rho e^{i\theta}$ точку ζ_0, лежащую в общей части полуплоскостей

$$P^*_{\theta_1'}:\ \rho\cos(\theta + \theta_1') > A_f(\theta_1') \quad \text{и} \quad P^*_{\theta_2'}:\ \rho\cos(\theta + \theta_2') > A_f(\theta_2'),$$

и проведем луч $\zeta_0 l_{\theta_1}$, лежащий в $P^*_{\theta_1'}$, и луч $\zeta_0 l_{\theta_2}$, лежащий в $P^*_{\theta_2'}$, причем $\theta_2 - \theta_1 < -\pi$.

Если $\operatorname{Re}[(z - z_0) e^{i\theta_1}] < 0$, $\operatorname{Re}[(z - z_0) e^{i\theta_2}] < 0$, то

$$F(z) = \int\limits_{\zeta_0 l_{\theta_2}}^{\infty} e^{z\zeta} d\zeta \int\limits_{z_0 l_{\theta_2'}}^{\infty} e^{-\zeta\zeta'} f(\zeta')\, d\zeta' - \int\limits_{\zeta_0 l_{\theta_1}}^{\infty} e^{z\zeta} d\zeta \int\limits_{z_0 l_{\theta_1'}}^{\infty} e^{-\zeta\zeta'} f(\zeta')\, d\zeta'.$$

При этом

$$\theta_1' < \frac{\pi}{2} - \theta_1 < \arg(z - z_0) < -\frac{\pi}{2} - \theta_2 < \theta_2'.$$

Изменяя порядок интегрирования в этих двойных интегралах, абсолютная сходимость которых обеспечивается предыдущими условиями, мы получаем:

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^-} e^{z\zeta}\,d\zeta\int_{z_0}^{\infty} e^{-\zeta\zeta'} f(\zeta')\,d\zeta'. \tag{A}$$

Двойной интеграл

$$\int_{z_0 l_{\theta_1'}} e^{-z\zeta'}\,d\zeta' \int_{\Gamma^{(+)}_{\theta_1}} e^{\zeta'\zeta} f(\zeta)\,d\zeta$$

абсолютно сходится, если все точки $\zeta' = \rho' e^{i\theta'}$ луча $z_0 l_{\theta_1'}$ лежат в полуплоскости $\rho'\cos(\theta' + \theta_1) + A_{\tilde{f}-f}(\theta_1) < 0$, а все точки ζ контура $\zeta_0 C \zeta_0$ удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re}[(z - \zeta)\,e^{i\theta_1'}] \geqslant 0.$$

Изменяя порядок интегрирования, мы получаем

$$\int_{\Gamma^{(+)}_{\theta_1}} \frac{f(\zeta)\,e^{(\zeta - z)z_0}}{z - \zeta}\,d\zeta,$$

причем z лежит вне контура $\zeta_0 C \zeta_0$.

Присоединяя к $\Gamma^{(+)}_{\theta_1}$ контур $\zeta_0^* \overset{*}{C} + \zeta_0^*$, содержащий внутри себя z и особые точки $f(z)$, и полагая

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{+}_{\theta_1} = \infty\, l_{\theta_1}\, \zeta_0^* \overset{*}{C}{}^{+} \zeta_0^*\, l_{\theta_1}\, \infty,$$

мы находим:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{z_0}^{\infty} e^{-z\zeta'}\,d\zeta' \int_{\Gamma^{(+)}} e^{\zeta'\zeta} f(\zeta)\,d\zeta + G(z), \tag{B}$$

где $G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\overset{*}{\Gamma}{}^{(+)}_{\theta_1}} \frac{f(\zeta)\,e^{(\zeta - z)z_0}}{\zeta - z}\,d\zeta$ — целая функция.

Называя функциями класса L многозначные в окрестности $z = \infty$ аналитические функции экспоненциального типа, для которых $z = \infty$ изолированная особая точка, мы можем формулировать полученный результат так:

Теорема. I. *Всякая функция $f(z)$ класса L может быть представлена в виде интеграла Лапласа второго рода*

$$f(z) = \int_{\Gamma} e^{z\zeta}\,\varphi(\zeta)\,d\zeta,$$

сходящегося всюду вне оболочки особых точек $f(z)$, причем

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{z_0}^{\infty} e^{-z\zeta} f(\zeta)\,d\zeta + \text{ произвольная целая функция,}$$

а z_0 — произвольная правильная точка функции $f(z)$.

II. *Всякая функция $f(z)$ класса L может быть в той же области единственным образом представлена в виде суммы интеграла Лапласа первого рода и целой функции $G(z)$:*

$$f(z)=\int_{z_0}^{\infty} e^{-z\zeta}\varphi(\zeta)\,d\zeta + G(z),$$

где z_0 — данная точка, лежащая вне диаграммы роста функции $\tilde{f}(z) - f(z)$.

Следствие 1. Если $f_1(z)=\int_{z_0}^{\infty} e^{-z\zeta} f(\zeta)\,d\zeta$, $f_2(z)=\int_{\Gamma^{(+)}} e^{z\zeta} f(\zeta)\,d\zeta$, то $K_{f_1}(\varphi)=A_f(-\varphi)$, $A_{f_2}(\varphi)=K_f(-\varphi)$.

Следствие 2. Если $\int_{\Gamma} e^{z\zeta} f(\zeta)\,d\zeta=0$, то $f(\zeta)$ — целая функция. Если $\int_{z_0}^{\infty} e^{z\zeta} f(\zeta)\,d\zeta$ — целая функция, то $f(z)\equiv 0$.

Следствие 3. Необходимое и достаточное условие представимости функции $f(z)$ класса L в виде интеграла Лапласа первого рода $\int_{z_0}^{\infty} e^{-z\zeta}\varphi(\zeta)\,d\zeta$, где $\varphi(z)\in L$, гласит: $\lim_{z\to\infty}(e^{z_0 z} f(z))=0$ на данном листе римановой поверхности $f(z)$.

Поступило
18 III 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. О. Гельфонд, Усп. матем. наук, 3 (1937).