Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 6

МАТЕМАТИКА

Л. НЕЙШУЛЕР

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ ДВУХЧЛЕННЫХ ТАБЛИЦАХ ФУНКЦИЙ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 19 III 1948)

Определения. 1. Если функцию n переменных $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно представить как суперпозицию k функций $f_1, f_2, \ldots, f_k$ двух переменных, то совокупность k таблиц, каждая с двумя входами, для функций $f_1, f_2, \ldots, f_k$ будем называть k-членной таблицей функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Каждую из этих таблиц с двумя входами назовем компонентами k-членной таблицы.

Очевидно, функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ трех переменных может быть двухчленно табулируема, только если она допускает представление вида $f(x_1, x_2, x_3) = f_2[f_1(x_i, x_j), x_p]$, где i, j, p — какая-то перестановка индексов 1, 2, 3.

2. Вход в таблицу по какому-нибудь аргументу табулируемой функции и сам этот аргумент будем называть прямыми, если значениями этого аргумента отмечены строки или столбцы страниц или страницы (развороты) таблицы.

Если значения аргумента помещаются внутри строк, столбцов, то вход по этому аргументу и сам аргумент назовем обратными.

3. Таблицу с n входами функции n переменных будем называть одночленной, если все входы прямые.

4. Объемом двухмерной (расположенной на одной странице или развороте) таблицы будем называть число hl, где h — максимальное число строк, а l — число столбцов.

Величины h и l характеризуют формат двухмерной таблицы, который мы будем обозначать символом (h, l).

5. Под трехмерной таблицей будем понимать таблицу, состоящую из m двухмерных таблиц, j-я из которых имеет формат (h_j, l_j). Обозначим соответственно через H и L максимальные значения h_j и l_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Объем трехмерной таблицы определится аналогично как HLm, а формат, определяемый величинами H и L, обозначим через (H, L).

6. В символах (H, L) и (h, l) H и h будем называть левыми, а L и l — правыми параметрами формата.

7. Объемом одночленной таблицы функции n переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем называть произведение $\prod_{i=1}^{m} m_i$, где m_i — число табличных значений, которые принимает аргумент x_i.

8. Отношение объема одночленной таблицы функции к объему k-членной таблицы той же функции будем называть степенью табулируемости второй таблицы.

9. Под рангом таблицы функции будем понимать отношение числа входов в таблицу к числу аргументов функции. Очевидно, ранг таблицы всегда $\geqslant 1$; ранг одночленной таблицы равен 1.

10. k-членную таблицу функции, степень табулируемости которой больше единицы и больше или равна степени табулируемости всякой другой возможной для этой функции k-членной таблицы той же точности и ранга, будем называть оптимальной.

11. Назовем частичной табличкой часть компонента, отвечающую фиксированному значению одного из аргументов.

Пусть теперь дана функция трех переменных $f\ (x,\ y,\ z)$, допускающая представление $f(x,\ y,\ z) = \psi[\varphi(x,\ y), z]$, т. е. двухчленно табулируемая. Двухчленная таблица этой функции состоит из двух компонент: I — для определения значений функции φ и II — для определения значений f. Каждую из компонент I и II можно строить в трех вариантах: а) оба аргумента прямые; б) первый аргумент прямой, а второй обратный; в) первый аргумент обратный, а второй прямой. Таким образом для двухчленной таблицы функции трех переменных получаем 9 вариантов таблиц.

Случаи а), б) и в) будем обозначать, соответственно, цифрами 0, 1, 2. Теперь каждый из 9 вариантов можно записать в виде двухзначного числа по троичной системе, причем цифра старшего разряда определяет вариант а), б) или в) для компоненты I, а цифра младшего разряда — для компоненты II. Варианты двухчленной таблицы расположим в следующем порядке: 00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21 и 22.

Основываясь на введенных понятиях и обозначениях, можно сформулировать и доказать следующие положения.

Лемма 1. *Для того чтобы вариант* a_1a_2 *двухчленной таблицы (не вырождающейся в одночленную) функции трех переменных* $f(x,\ y,\ z)$, *допускающей представление* $f(x,\ y,\ z) = \psi[\varphi(x,\ y), z]$, *имел ранг единица, необходимо и достаточно, чтобы:* 1) $a_1 > 0$, $a_2 < 2$ *и* 2) *частичные таблички компонент имели форму столбцов или строк.*

Обозначение. Будем обозначать через $t[u]$ число табличных значений, принимаемых переменной u (u может быть аргументом или функцией).

Лемма 2. *Если* $t[z] < t[f]$, *то из двухмерных двухчленных таблиц ранга единица минимальным объем будет у таблицы варианта* 10, *когда* $t[x] < t[y]$, *и варианта* 20, *когда* $t[x] < t[y]$.

Если частичные таблички имеют форму столбцов, то формат двухмерной таблицы будет $(r,\ m+k)$, где r — число табличных значений функции φ, а m и k, соответственно, — число столбцов компонент I и II; такой формат будем называть максимальным. Числа m и k будем называть компонентами правого параметра формата.

Необходимость обращения к трехмерным двухчленным таблицам появляется в случаях, когда максимальный формат выходит за пределы доступного.

Построение трехмерных таблиц с соблюдением заданного формата осуществляется с помощью разбиения последовательности значений, отмечающих столбцы компонент I и II, а также строки таблицы максимального формата на подпоследовательности и построения двухмерных таблиц для всевозможных сочленений этих подпоследовательностей.

Очевидно, объем трехмерной таблицы может меняться в зависимости от выбора разбиения на подпоследовательности.

Определение. Трехмерную двухчленную таблицу ранга единица будем называть упорядоченной, если описанное выше разбиение на подпоследовательности удовлетворяет условию минимума объема при заданном формате.

Лемма 3. *Объем упорядоченной трехмерной двухчленной таблицы ранга единица есть невозрастающая функция правого (левого) параметра формата, если частичные таблички первой компоненты двухчленной таблицы имеют форму столбцов (строк).*

Лемма 4. *Если $t[z] < t[f]$, то из упорядоченных при одном и том же формате трехмерных двухчленных таблиц ранга единица минимальным будет объем варианта 10, когда $t[x] < t[y]$, и варианта 20, когда $t[x] > t[y]$.*

Леммы 2 и 4 дают возможность выбора конструкций таблиц минимального объема при фиксировании представления $f(x, y, z) = \psi[\varphi(x, y), z]$. Но функция f может допускать и другие представления вида $\psi_i[\varphi_i(x,y), z]$, и желательно уметь определить конструкцию таблицы минимального объема при любом возможном представлении данного вида для функции $f(x, y, z)$.

Определение. Два представления $f_k(\ldots(f_2(f_1(x_{i_1}, x_{i_2}), x_{i_3})\ldots)x_{i_{k+1}})$, $\varphi_k(\ldots(\varphi_2(\varphi_1(x_{i_1}, x_{i_2})\, x_{i_3}),\ldots)x_{i_{k+1}})$ с одинаковым порядком „наслаивания" аргументов x_{i_s} $(s = 1, 2, \ldots, k+1)$ и, может быть, различными между собой функциями f_j и φ_j будем называть сходными; пары функций f_j и φ_j — соответственными, а функции f_k и φ_k — конечными.

Определение. Если в любых сходных между собой представлениях все соответственные функции, кроме, быть может, конечных, суть функции одна другой, то такие представления будем называть эквивалентными.

Определение. k-членно табулируемая на данном представлении (N) функция f называется табулярно однозначной, если всякое сходное с (N) представление эквивалентно (N).

Конструкция k-членной таблицы остается неизменной при переходе от одного представления функции к ему эквивалентному.

Лемма 5. *Всякая двухчленно табулируемая функция табулярно однозначна.*

Обозначение. n-й вариант упорядоченной трехмерной двухчленной таблицы, частичные таблички которой имеют форму столбцов (или строк) и $L = 2N$ (или $H = 2N$) с рангом α для функции трех переменных, основанной на представлении $f(x, y, z) = f_2[f_1(x, y), z]$, будем обозначать символом

$$\overset{\alpha\text{———}3}{2N\underset{2n}{|}} f(x, y, z) = f_2[f_1(x, y), z].$$

Теорема 1. *Если:*

1) *функция трех переменных $f(x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial\alpha}{\partial x_p} = 0$, где $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x_i} : \frac{\partial f}{\partial x_j}$, при одной и только одной какой-нибудь перестановке i, j, p индексов 1, 2, 3;*

2) *$\varphi(x_i, x_j)$ — какой-нибудь интеграл обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка $\alpha dx_i + dx_j = 0$;*

3) $t[x_p] < t[f]$;

4) $t[x_i] < t[x_j]$,

то из двухчленных таблиц ранга 1 таблица $\overset{1\text{—}3}{2N\underset{24}{|}} f(x_1, x_2\, x_3) = \psi[\varphi(x_i, x_j)\, x_p]$ *оптимальна для любого значения N правого параметра формата этой таблицы, когда частичные таблички ее первой компоненты имеют форму столбцов, а когда они имеют форму строк, то для любого значения N левого параметра формата, удовлетворяющего неравенству*

$$M > 2N \geqslant 2N^*, \tag{5}$$

где M — значение, соответственно форме частичных табличек первой компоненты нашей таблицы, правого или левого параметра максимального формата нашей таблицы (при которой она может стать двухмерной); N^* удовлетворяет неравенству

$$2t[\varphi]\left(\frac{1}{N^*}+\frac{t[x_i]+t[x_p]+N^*}{t[x_i]\,t[x_p]}\right)\leqslant t(x_j). \tag{6}$$

Если в (4) и (6) x_i и x_j поменять местами, то при тех же условиях оптимальной окажется

$$2N\Big|_{27}^{1-3} f(x_1,x_2,x_3)=\psi[\varphi(x_i,x_j),x_p].$$

Следствие. Если выполнено условие (1) теоремы при двух или всех трех перестановках индексов 1, 2, 3, то для построения оптимальной трехмерной двухчленной таблицы ранга единица при заданном формате надо воспользоваться теоремой для каждой перестановки и из найденных таким образом табличных конструкций выбрать конструкцию минимального объема.

Поступило
8 III 1948