Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 6

МАТЕМАТИКА

С. М. ЛОЗИНСКИЙ

О СИЛЬНОЙ СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ. III

(Представлено академиком В. И. Смирновым 11 III 1948)

§ 1. Интерполяция тригонометрическими полиномами. Пусть

$$\begin{array}{lllll} x_1^{(0)} & & & & \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & & \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & x_3^{(n)} & \ldots & x_{2n+1}^{(n)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \end{array} \qquad (\mathfrak{M})$$

есть матрица узлов тригонометрической интерполяции ($0 \leqslant x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_{2n+1}^{(n)} < 2\pi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$) и пусть $l_k^{(n)}(x)$ ($k = 1, 2, \ldots, 2n+1; n = 1, 2, 3, \ldots$) суть соответствующие фундаментальные интерполяционные тригонометрические полиномы, т. е. пусть $l_k^{(n)}(x)$ есть тот единственный тригонометрический полином порядка n, который удовлетворяет условиям

$$l_k^{(n)}(x_i^{(n)}) = \begin{cases} 1 \text{ при } i = k, \\ 0 \text{ при } i \neq k. \end{cases}$$

Если $f(x)$ есть 2π-периодическая и везде конечная вещественная функция, то пусть

$$U_n(\mathfrak{M}, f) \equiv U_n(\mathfrak{M}, f, x) \equiv \sum_{k=1}^{2n+1} f(x_k^{(n)})\, l_k^{(n)}(x).$$

Очевидно, что $U_n(\mathfrak{M}, f, x)$ есть тот единственный тригонометрический полином порядка $\leqslant n$, который удовлетворяет условиям

$$U_n(\mathfrak{M}, f, x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)}), \qquad k = 1, 2, \ldots, 2n+1.$$

Теорема 1. *Для любой матрицы* $\mathfrak{M}$

$$\frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} \underset{0 \leqslant x \leqslant 2\pi}{\mathrm{var}}\, l_k^{(n)}(x) \geqslant \frac{4}{\pi} \log n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1}$$

где $\underset{0 \leqslant x \leqslant 2\pi}{\mathrm{var}}$ *означает полную вариацию на интервале* $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Константа $\frac{4}{\pi}$ *справа наилучшая.*

С л е д с т в и е. Для любой матрицы $\mathfrak{M}$ при $n = 1, 2, 3 \ldots$ найдется $k = k(\mathfrak{M}, n)$, $1 \leqslant k \leqslant 2n + 1$, такое, что

$$\operatorname*{var}_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} l_k^{(n)}(x) \geqslant \frac{4}{\pi} \log n. \tag{2}$$

З а м е ч а н и е. Константа $\frac{4}{\pi}$ и здесь наилучшая.

Обозначим через Ω^* (см. ([1]), стр. 186) множество функций $M(u)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $M(0) = 0$, $M(u) \geqslant 0$ выпукла и постоянно возрастает при $0 \leqslant u < \infty$.

2) $\lim\limits_{u \to 0+} \frac{M(u)}{u} = 0$, $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{M(u)}{u} = +\infty$.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $M(u) \in \Omega^*$ *и*

$$\underline{\lim}_{u \to +\infty} \frac{M(u)}{u \log u} = 0. \tag{3}$$

Тогда по любой матрице $\mathfrak{M}$ *найдется функция* $f(x)$, 2π*-периодическая, абсолютно непрерывная при* $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ *и удовлетворяющая следующим условиям:*

$$\int_0^{2\pi} M[|f'(x)|]\, dx < +\infty \tag{4}$$

и

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \int_0^{2\pi} |U_n'(\mathfrak{M}, f, x)|\, dx = +\infty. \tag{5}$$

З а м е ч а н и е. Условие (3) ослаблено быть не может, так как (см. ([1])) матрица $\mathfrak{M}$, для которой $x_k^{(n)} = \frac{2(k-1)\pi}{2n+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n+1;$ $n = 1, 2, 3, \ldots)$ обладает следующим свойством:

если

$$\underline{\lim}_{u \to \infty} \frac{M(u)}{u \log u} > 0, \tag{6}$$

то для любой абсолютно непрерывной и 2π-периодической функции $f(x)$, удовлетворяющей условию (4), имеем:

$$\lim_{u \to \infty} \int_0^{2\pi} |f'(x) - U_n'(\mathfrak{M}, f, x)|\, dx = 0.$$

§ 2. И н т е р п о л я ц и я о б ы к н о в е н н ы м и п о л и н о м а м и. Пусть

$$\begin{matrix} x_1^{(1)} & & & \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \cdots & x_n^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \tag{$\mathfrak{M}$}$$

есть матрица узлов интерполяции на $-1 \leqslant x \leqslant 1$:

$$1 \geqslant x_1^{(n)} > x_2^{(n)} > \ldots > x_n^{(n)} \geqslant -1.$$

Пусть $l_k^{(n)}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n; \quad n = 1, 2, 3, \ldots)$ суть фундаментальные интерполяционные полиномы, соответствующие матрице $\mathfrak{M}$, т. е. пусть $l_k^{(n)}(x)$ есть тот единственный полином порядка $n-1$, который удовлетворяет условиям

$$l_k^{(n)}(x_i^{(n)}) = \begin{cases} 1 \text{ при } i = k, \\ 0 \text{ при } i \neq k. \end{cases}$$

Теорема 3. *Для любой матрицы* $\mathfrak{M}$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{var}_{-1 \leqslant x \leqslant 1} l_k^{(n)}(x) \geqslant \frac{2}{\pi} \log n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{7}$$

Константа $\frac{2}{\pi}$ *справа наилучшая.*

Следствие. Для любой матрицы $\mathfrak{M}$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$ найдется $k = k(\mathfrak{M}, n)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, такое, что

$$\operatorname*{var}_{-1 \leqslant x \leqslant 1} l_k^{(n)}(x) \geqslant \frac{2}{\pi} \log n. \tag{8}$$

Замечание. Константа $\frac{2}{\pi}$ и здесь наилучшая.

Если $f(x)$ есть определенная и конечная на $-1 \leqslant x \leqslant 1$ функция, то положим

$$L_n(\mathfrak{M}, f) \equiv L_n(\mathfrak{M}, f, x) \equiv \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)}) l_k^{(n)}(x).$$

Очевидно, что $L_n(\mathfrak{M}, f, x)$ есть тот единственный полином порядка $\leqslant n-1$, который удовлетворяет условиям

$$L_n(\mathfrak{M}, f, x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)}), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Теорема 4. *Пусть* $M(u) \in \Omega^*$ *и*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{M(u)}{u \log u} = 0. \tag{3}$$

Тогда по любой матрице $\mathfrak{M}$ *найдется функция* $f(x)$, *абсолютно непрерывная на интервале* $-1 \leqslant x \leqslant 1$ *и удовлетворяющая следующим условиям*:

$$\int_{-1}^{1} M[|f'(x)|]\, dx < +\infty \tag{9}$$

и

$$\varlimsup_{n \to \infty} \int_{-1}^{1} |L_n(\mathfrak{M}, f, x)|\, dx = +\infty. \tag{10}$$

З а м е ч а н и е. Условие (3) ослаблено быть не может, так как, как легко следует из результатов работы [1], матрица $\mathfrak{M}$, для которой $x_k^{(n)} = \cos \frac{2(k-1)\pi}{2n-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n; \quad n = 1, 2, \ldots)$, обладает следующим свойством:

если

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{M(u)}{u \log u} > 0, \tag{6}$$

то для любой абсолютно непрерывной на $-1 \leqslant x \leqslant 1$ функции $f(x)$, удовлетворяющей условию (9), имеем

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{1} |f'(x) - L_n'(\mathfrak{M}, f, x)| \, dx = 0.$$

Поступило
5 III 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л о з и н с к и й, Матем. сб., 14, 175 (1944).