Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 6

МАТЕМАТИКА

Л. В. КАНТОРОВИЧ

К ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ АНАЛИЗА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 22 III 1948)

В XX в. было создано большое число методов приближенного решения различных задач анализа — дифференциальных уравнений, обыкновенных и в частных производных, интегральных уравнений, бесконечных алгебраических систем. Однако построение этих методов и их исследование проводилось для каждого из методов и для каждого типа уравнений особым образом. Естественной является задача найти общий подход к их построению и дать единую теорию вопроса. Попытка дать теорему о приближенном решении общих — функциональных уравнений сделана в моей работе 1937 г. ([1]), однако эта теорема имела лишь ограниченные применения. Существенное отличие подхода, применяемого в данной работе, в том, что точное и приближенное уравнения рассматриваются в различных пространствах, что соответствует положению, которое мы имеем для важнейших конкретных приближенных методов, например, когда интегральное уравнение заменяется конечной алгебраической системой.

Именно при таких общих условиях, при известных предпосылках, может быть установлен комплекс теорем, позволяющих, исходя из разрешимости данного уравнения, заключать о разрешимости „приближенного" уравнения, об оценке погрешности, о сходимости приближенных решений к точному и, наконец, позволяющих, наоборот, заключать о разрешимости точного уравнения и о порядке погрешности на основании результатов решения приближенного уравнения.

§ 1. Пусть $U=\{u\}$ и $V=\{v\}$ — линейные нормированные пространства. Наряду с ними рассматривается другая пара нормированных полных пространств: $\overline{U}=\{\overline{u}\}$ и $\overline{V}=\{\overline{v}\}$. Предполагается, что в U выделено линейное подмножество $U'\subset U$, изоморфное $\overline{U}$, причем изоморфизм осуществляется линейной операцией φ. Аналогичным образом операция $\overline{v}=\psi v$ осуществляет изоморфизм между $V'\subset V$ и $\overline{V}$, но определена для всех $v\in V$.

Рассматриваются два линейных уравнения

$$Ku=v, \tag{1}$$

$$\overline{K}\,\overline{u}=\overline{v}. \tag{2}$$

Поставим следующие условия:

Условие I. $\|\overline{K}\varphi u'-\psi K u'\|<\varepsilon\,\|u'\|$ для $u'\in U'$.

Условие II. Для всякого $u\in U$ найдется такое $u'\in U'$, что

$$\|\psi K u-\psi K u'\|<\varepsilon_1\|Ku\|,\quad \|u'\|\leqslant M\|Ku\|.$$

Теорема 1. *Если существует обратный оператор* K^{-1} ($\|K^{-1}\|<+\infty$) *и*

$$q=(\varepsilon M+\varepsilon_1)\,\|\psi^{-1}\|<1, \tag{3}$$

то уравнение (2) *имеет при всяком* $\bar{v}$ *решение* $\bar{u}$, *и при этом*

$$\|\bar{u}\| \leqslant \frac{M\|\varphi\|\,\|\psi^{-1}\|}{1-q}\,\|\bar{v}\|. \tag{4}$$

Замечание 1. Если $\bar{K}$ удовлетворяет условию (А): из существования решения уравнения (2) при любом $\bar{v}$ следует его единственность, то, при условиях теоремы, существует оператор $\bar{K}^{-1}$ и

$$\|\bar{K}^{-1}\| \leqslant \frac{M\|\varphi\|\,\|\psi^{-1}\|}{1-q}. \tag{5}$$

Предположим, что известна степень апроксимации решения u^* уравнения (1) элементами U':

$$\|u^* - u'\| < \varepsilon_2\|u^*\|; \quad u' \in U. \tag{6}$$

Теорема 2. *Если существует оператор* $\bar{K}^{-1}$ *и справедливо* (6) *то*

$$\|u^* - \varphi^{-1}\bar{u}^*\| = \|u^* - \varphi^{-1}\bar{K}^{-1}\psi v\| \leqslant$$
$$\leqslant [\varepsilon_2 + (\varepsilon(1+\varepsilon_2) + \varepsilon_2\|\psi K\|)\,\|\varphi^{-1}\|\,\|\bar{K}^{-1}\|]\,\|u^*\|, \tag{7}$$

т. е. решение (2) *позволяет построить приближенное решение* (1).

Пусть имеется последовательность приближенных уравнений типа (2). В таком случае величины $\|\varphi\|$, $\|\psi\|$, ε, ε_1, ε_2, M, а также множества $\bar{U}$, $\bar{V}$, U', V' будут зависеть от индекса n. Тогда справедлива:

Теорема 3 (о сходимости). *Если выполнены условия*: 1) *существует* $\bar{K}^{-1}$, 2) $\bar{K}$ *удовлетворяет условию* (А) *и*

$$\begin{aligned} &3)\ \lim_{n\to\infty} M\|\varphi\|\,\|\psi^{-1}\|\,\|\varphi^{-1}\|\,[\varepsilon + \varepsilon_2(1+\|\psi\|)] = 0,\\ &\lim_{n\to\infty} \varepsilon_1\|\psi^{-1}\| = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

то приближенные решения сходятся к точному (*по норме*):

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi^{-1}(\bar{u}^*) - u^*\| = 0. \tag{9}$$

Условие III. Для $u \in U$ существует такое $u' \in U'$, что $\|u - u'\| \leqslant \varepsilon_3\|u\| + N\|Ku\|$.

Теорема 4. *Если существует оператор* $\bar{K}^{-1}$ *и выполнено условие*

$$r = \varepsilon_3(1 + \|\psi K\|\,\|\varphi^{-1}\|\,\|\bar{K}^{-1}\|) + 2\varepsilon\|\varphi^{-1}\|\,\|\bar{K}^{-1}\| < 1, \tag{10}$$

то оператор K *имеет обратный и*

$$\|K^{-1}\| \leqslant \frac{\|\varphi^{-1}\bar{K}^{-1}\psi\| + N(1 + \|\psi K\|\,\|\varphi^{-1}\|\,\|\bar{K}^{-1}\|)}{1-r}. \tag{11}$$

Полезно указать общий прием построения приближенного уравнения (2). Пусть имеется семейство U' в U, зависящее от параметра $\bar{u} \in \bar{U}$: $\bar{u} = \varphi u'$, а также отображение V на $\bar{V}$: $\psi v = \bar{v}$. Далее, K_1 — оператор, близкий к K. Тогда за уравнение (2) можно принять

$$\bar{K}\bar{u} = \psi K_1\varphi^{-1}\bar{u} = \bar{v} = \psi v. \tag{12}$$

Условие I будет выполнено для $\varepsilon = \|\psi\|\,\|K - K_1\|_{U'}$.

§ 2. Уравнение второго рода. Условия упрощаются, если рассматривать уравнения 2-го рода. Здесь предполагается, что $U=V$, $U'=V'$, $\overline{U}=\overline{V}$, $\psi=\varphi$. Уравнения (1) и (2) принимают вид

$$Ku=u-\lambda Hu=v, \tag{1a}$$

$$\overline{K}\,\overline{u}=\overline{u}-\lambda\overline{H}\,\overline{u}=\varphi v. \tag{2a}$$

Поставим следующие условия:

Условие Ia. $\|\overline{H}\varphi u'-\varphi Hu'\|<\eta\|u'\|$, $u\in U'$.

Условие IIa. Для $u\in U$ найдется такое $u'\in U'$, что $\|Hu-u'\|<<\eta_1\|u\|$,

а также потребуем, чтобы v допускал апроксимацию элементами U': $\|v-u'\|<\eta_2\|v\|$.

Эти условия влекут за собой I, II, III и (6), причем $\varepsilon=|\lambda|\eta$; $\varepsilon_1==\|\varphi\|\,\|K\|\,\|\overline{K}^{-1}\|\,\|\varphi^{-1}\varphi\|\,|\lambda|\eta_1$; $M=(1+|\lambda|\eta_1)\,\|\overline{K}^{-1}\|\,\|\varphi^{-1}\varphi\|$; $\varepsilon_2=|\lambda|\eta_1+\|K\|\eta_2$; $\varepsilon_3=|\lambda|\eta_1$; $N=1$.

Эти соотношения позволяют сразу получить для данного случая теоремы 1—4, видоизмененных формулировок которых приводить не будем. При этом сходимость приближенных решений к точному имеет место, если существует K^{-1}, оператор $\overline{H}$ вполне непрерывен и

$$\lim_{n\to\infty}\eta\,\|\varphi^{-1}\|^3\,\|\varphi\|^2=0; \qquad \lim_{n\to\infty}(\eta_1+\eta_2)\,\|\varphi\|^3\,\|\varphi^{-1}\|^3=0.$$

Здесь может быть доказана и теорема, не имевшая аналога в § 1.

Теорема 5. *Если оператор H вполне непрерывен, существует $\overline{K}^{-1}$ и*

$$p'=\eta_1+\|\varphi^{-1}\|\,\|\overline{K}^{-1}\|\,[\,\|\varphi K\|\eta_1+|\lambda|(\|H\|+\eta_1)\eta]<1, \tag{13}$$

то существует оператор K^{-1} и справедливо неравенство

$$\|K^{-1}-[I+\varphi^{-1}\overline{K}^{-1}\lambda\varphi H\,]\,\|<p'.$$

Замечание. Неравенство (13) позволяет определить область возможных собственных значений уравнения (1a) по результатам решения уравнения (2a), а (3) — установить область расположения собственных λ для уравнения (2a), а также сходимость последних при $n\to\infty$ к собственным значениям (1a). Отметим, что результаты этого параграфа могут быть применены также к уравнениям вида

$$Ku=Gu-\lambda Tu=v, \qquad \overline{K}\,\overline{u}=\psi G\varphi^{-1}\,\overline{u}-\lambda\overline{T}\,\overline{u}=\overline{v}=\psi v,$$

где G — оператор, имеющий обратный, переводящий U в V, а также U' в V', а T и $\overline{T}$ — линейные операторы, подчиненные надлежащим условиям.

§ 3. Приложения. Отметим некоторые из результатов, получаемых применением общей теории к отдельным методам и типам уравнений.

1. Бесконечные системы уравнений. Для системы типа H. v. Koch'a

$$x_i-\sum_{k=1}^{\infty}a_{i,k}x_k=b_i \quad (i=1,2,\ldots,n), \qquad \sum_{i,k}a_{i,k}^2<+\infty, \tag{14}$$

рассмотрим метод редукции — замену конечной системой

$$\overline{x}_i-\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}\overline{x}_k=b_i \quad (i=1,2,\ldots,n). \tag{15}$$

Здесь $\varphi u=\varphi(x_1,\ldots,x_n,\ldots)=(x_1,\ldots,x_n)$, $\eta=0$ и $\eta_1=\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{i,k}^2\right)^{1/2}$,

если принять за U' множество элементов вида $u=(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$.

Применение предыдущих теорем позволяет установить сходимость метода при условии $\Sigma b_i^2 < +\infty$ при $n \to \infty$ и дать оценку погрешности при n-м шаге, а также устанавливать разрешимость бесконечной системы на основе решения конечной. То же может быть получено и для всего класса систем Гильберта с вполне-непрерывным ядром.

2. Интегральные уравнения. а) Метод замены системой алгебраических уравнений ([2]). Для определенности рассмотрим уравнение

$$u(x) - \lambda \int_0^1 H(x, y)\, u(y)\, dy = v(x), \tag{16}$$

где H и v периодичны с периодом 1, и замену его системой

$$u(x_i) - \lambda \sum_{k=1}^{\infty} A_k H(x_i, x_k)\, u(x_k) = v(x_i)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n); \qquad x_k = \frac{2k-1}{2n}; \quad A_k = \frac{1}{n}.$$

Обозначим $E_n^{(x)}(H)$ и $E_n^{(y)}(H)$ наилучшие приближения для H косинусным полиномом n-го порядка от x и от y соответственно и примем $\bar{u} = \varphi u = (u(x_1), \ldots, u(x_n))$. Тогда можно установить, что в данном случае $\eta = 2E_n^{(y)}(H)$, $\eta_1 = E_n^{(x)}(H)$, $\eta_2 = E_n(v) : \|v\|$. Это показывает, что оценка погрешности приближенного решения имеет порядок $O[\lg n (E_n^{(x)} + E_n^{(y)} + E_n)]$, и дает ряд других результатов.

б) Смешанный метод. Для (16) рассмотрим метод разыскания решения в форме $u'(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k \omega_k(x)$, где C_i определяются из системы

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \omega_k(x_i) - \lambda \int_0^1 H(x_i, y) \sum_{k=1}^{n} C_k \omega_k(y)\, dy = v(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Исследование этого весьма полезного метода до сих пор не проводилось. Применение общей теории для $\omega_k(x) = \cos(k-1)\pi x$ и $x_k = (2k-1)/n$ устанавливает сходимость метода при условии $(\lg n)^3 E_n^{(x)} \to 0$.

Теория может быть применена и к исследованию для интегральных уравнений метода Ритца и метода замены ядра на вырожденное.

3. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Здесь мы ограничимся указанием, что применение общей теории позволяет вновь получить результат М. В. Келдыша ([3]) о сходимости метода Галеркина. При этом, если речь идет об уравнениях 2-го порядка и за основные функции приняты тригонометрические, устанавливается дополнительно, что ошибка n-го приближения порядка $O(n^{-1/2})$. В случае самосопряженного уравнения порядок оказывается $O(n^{-3/2})$; последнее было установлено прежде Н. М. Крыловым ([4]).

Основные методы приближенного решения уравнений в частных производных также подходят под схему общей теории, но результаты ее применения в этом случае будут рассмотрены особо.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
17 III 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Канторович, Уч. зап. ЛГУ, № 17 (1937). [2] Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, 1941. [3] М. В. Келдыш, Изв. АН СССР, сер. матем., № 5 (1942). [4] Н. М. Крылов, Приближенное решение основных проблем математической физики, Киев, 1931.