Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 6

МАТЕМАТИКА

Я. Л. ГЕРОНИМУС

О НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВАХ В ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ТИПА КАРАТЕОДОРИ И ШУРА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 26 III 1948)

Рассмотрим функцию $F(z)$ типа Каратеодори [1] (короче, C-функцию), которая в области $|z|<1$ регулярна и удовлетворяет неравенству $\operatorname{Re} F(z)>0$. Функция

$$f(z)=\frac{F(z)-1}{F(z)+1} \tag{1}$$

является функцией типа Шура [2] (короче, S-функцией) — она в области $|z|<1$ регулярна и удовлетворяет неравенству $|f(z)|<1$. Посредством известного алгоритма Шура [2]

$$f_\nu(z)=\frac{1}{z}\,\frac{f_{\nu-1}(z)-f_{\nu-1}(0)}{1-\overline{f_{\nu-1}(0)}\,f_{\nu-1}(z)} \quad (\nu=1,2,\ldots); \qquad f_0(z)=f(z) \tag{2}$$

введем параметры $\gamma_\nu=f_\nu(0)$ $(\nu=0,1,2,\ldots)$. Случай, когда $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}|\gamma_\nu|<\infty$, Шур считал особенно интересным — он показал, что в этом случае S-функция $f(z)$ в замкнутой области $|z|\leqslant 1$ непрерывна и удовлетворяет неравенству

$$|f(z)|<\sqrt{\frac{G-1}{G}}<1, \qquad G=\prod_{\nu=0}^{\infty}\frac{1+|\gamma_\nu|}{1-|\gamma_\nu|}. \tag{3}$$

Эта граница, однако, не является точной; нормализируя S-функцию $f(z)$ условием $f(0)=0$, мы дадим точную границу и укажем те функции, для которых она достигается.

Теорема. *Если* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}|\gamma_\nu|<\infty$, *то для* $|z|\leqslant 1$ *точка* $w=F(z)$, *где* $F(0)=1$, *не выходит за пределы круга* K, *построенного на отрезке* $[1/G, G]$ *как на диаметре, а точка* $v=f(z)$, *где* $f(0)=0$, *не выходит за пределы круга* K':

$$|v|\leqslant\frac{G-1}{G+1}; \tag{4}$$

функции

$$F_0(z)=\frac{1+\alpha z^s}{1-\alpha z^s},\quad f_0(z)=\alpha z^s,\quad s\geqslant 1,\quad |\alpha|<1,\qquad G=\frac{1+|\alpha|}{1-|\alpha|}\tag{5}$$

показывают, что эти области не могут быть сужены *.

Для доказательства рассмотрим сперва S-функцию $\varphi_n(z)$, для которой

$$|\gamma_\nu|<1\quad(\nu=0,1,\ldots,n);\qquad \gamma_k=0\quad(k=n+1,\ n+2,\ldots);\tag{6}$$

она является рациональной функцией: $\varphi_n(z)=C_n(z)/A_n(z)$, причем полиномы $\{C_\nu(z)\}_0^n$ и $\{A_\nu(z)\}_0^n$ связаны соотношениями (([2]), § 14)

$$\begin{gathered} A_\nu(z)=A_{\nu-1}(z)+z\gamma_\nu C^*_{\nu-1}(z),\quad C^*_{\nu-1}(z)=z^{\nu-1}\bar C_{\nu-1}\left(\frac{1}{z}\right),\\ C_\nu(z)=C_{\nu-1}(z)+z\gamma_\nu A^*_{\nu-1}(z),\quad A^*_{\nu-1}(z)=z^{\nu-1}\bar A_{\nu-1}\left(\frac{1}{z}\right),\\ \nu=1,2,\ldots,n. \end{gathered}\tag{7}$$

Введем две новые системы полиномов:

$$\begin{gathered} P_{\nu+1}(z)=P_\nu(z)-z\gamma_\nu P^*_\nu(z),\quad R_{\nu+1}(z)=R_\nu(z)+z\gamma_\nu R^*_\nu(z),\\ \nu=0,1,\ldots,n,\qquad P_0=R_0=1; \end{gathered}\tag{8}$$

из (7) легко находим

$$\begin{gathered} P_{\nu+1}(z)=A_\nu(z)-zC_\nu(z),\quad R_{\nu+1}(z)=A_\nu(z)+zC_\nu(z),\\ \nu=0,1,\ldots,n. \end{gathered}\tag{9}$$

Покажем, что полиномы $\{P_\nu(z)\}_1^{n+1}$ и $\{R_\nu(z)\}_1^{n+1}$ не обращаются в нуль в замкнутой области $|z|\leqslant 1$.

Полином $P_1(z)=A_0-zC_0=1-z\gamma_0$, очевидно, обладает этим свойством, ибо по (6) $|\gamma_0|<1$; пусть полиномы $\{P_\nu(z)\}_1^m$, где $m\leqslant n$, обладают этим свойством — тогда формула

$$\left|\frac{P_{m+1}(z)-P_m(z)}{P_m(z)}\right|=\left|\gamma_m z\,\frac{P^*_m(z)}{P_m(z)}\right|<1,\ |z|\leqslant 1,\tag{10}$$

показывает, что и полином $P_{m+1}(z)\neq 0$ для $|z|\leqslant 1$.

Мы имеем из (9)

$$P_{n+1}(z)=\prod_{\nu=0}^{n}\left\{1-z\gamma_\nu\frac{P^*_\nu(z)}{P_\nu(z)}\right\},\qquad R_{n+1}(z)=\prod_{\nu=0}^{n}\left\{1+z\gamma_\nu\frac{R^*_\nu(z)}{R_\nu(z)}\right\};\tag{11}$$

---

* Эта теорема доказана в нашей работе ([3]) при помощи ортогональных полиномов, связанных с C- и S-функциями. В настоящей заметке мы не пользуемся ортогональными полиномами и доказываем теорему, оставаясь в рамках теории Шура и пользуясь только его результатами,— нам кажется, что такое доказательство, не пользующееся никаким аппаратом, кроме имеющегося у Шура, представляет интерес.

отсюда находим для $|z| \leqslant 1$

$$\frac{1}{G_n} \leqslant \left| \frac{R_{n+1}(z)}{P_{n+1}(z)} \right| \leqslant G_n, \qquad G_n = \prod_{\nu=0}^{n} \frac{1+|\gamma_\nu|}{1-|\gamma_\nu|}. \tag{12}$$

Мы приходим к неравенствам

$$\frac{1}{G_n} \leqslant \left| \frac{1+z\varphi_n(z)}{1-z\varphi_n(z)} \right| \leqslant G_n, \qquad |z| \leqslant 1; \tag{13}$$

отсюда вытекает, что точка $v_n = z\varphi_n(z)$ не выходит за пределы замкнутой области $\overline{K}_n'$, причем область K_n' расположена внутри окружности $|v_n| = 1$ и вне двух окружностей, имеющих диаметрами отрезки $[g_n, 1/g_n]$ и $[-g_n, -1/g_n]$, где

$$g_n = \frac{G_n - 1}{G_n + 1} < 1. \tag{14}$$

Рассмотрим теперь новое семейство параметров $\gamma_\nu' = e^{i\alpha}\gamma_\nu$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$), где $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$; мы видим, что точка v_n не выходит за пределы замкнутой области, являющейся пересечением всех областей, получаемых из $\overline{K}_n'$ поворотом вокруг точки $v_n = 0$ на произвольный угол $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$: такой областью является круг $|v_n| \leqslant g_n$.

Пусть теперь $n \to 0$; благодаря условию $\sum_{\nu=0}^{\infty} |\gamma_\nu| < \infty$ мы легко находим из (11)*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(z) = P(z), \quad \lim_{n\to\infty} R_n(z) = R(z), \quad |z| \leqslant 1, \tag{15}$$

где $P(z)$, $R(z)$ — аналитические функции, регулярные в области $|z| < 1$ и непрерывные для $|z| \leqslant 1$; следовательно, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} z\varphi_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{R_{n+1}(z) - P_{n+1}(z)}{R_{n+1}(z) - P_{n+1}(z)} = \frac{R(z) - P(z)}{R(z) + P(z)}, \tag{16}$$

и предельная функция обладает этими же свойствами.

С другой стороны, мы имеем ((2), § 3)

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(z) = \varphi(z) \tag{17}$$

равномерно для $|z| \leqslant r < 1$, где $\varphi(z)$ является S-функцией, построенной по заданным параметрам $\{\gamma_\nu\}_0$.

Итак, при условии $\sum_{\nu=0}^{\infty} |\gamma_\nu| < \infty$ S-функция $f(z) = z\varphi(z)$ в замкнутой области $|z| \leqslant 1$ непрерывна и удовлетворяет неравенству

$$|f(z)| \leqslant \frac{G-1}{G+1}, \qquad G = \lim_{n\to\infty} G_n = \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{1+|\gamma_\nu|}{1-|\gamma_\nu|}; \tag{18}$$

* Сходимость равномерная при $|z| \leqslant 1$.

отсюда сразу вытекает соответствующая область K для C-функции $F(z)$.

Примечание. Главный интерес этой теоремы заключается в следующем: по лемме Шварца точки w и v не выходят за пределы соответствующих кругов K и K' при

$$|z| \leqslant \frac{G-1}{G+1}; \tag{19}$$

при добавочном условии $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |\gamma_\nu| < \infty$ C- и S-функции обладают этим свойством не только для значений $|z|$, удовлетворяющих (19), но и для всех значений z из замкнутого круга $|z| \leqslant 1$.

Поступило
23 III 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] C. Carathéodory, Rend. Circ. Mat. Palermo, **32**, 193 (1911). [2] J. Schur, J. reine u. angewandte Math., **147**, 205 (1917); **148**, 122 (1918). [3] Я. Л. Геронимус Матем. сб., **15** (57): 1, 99 (1944).