Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 6

МАТЕМАТИКА

Академик С. Н. БЕРНШТЕЙН

О ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ МНОГИХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Для большей наглядности и упрощения формул мы будем обычно предполагать число переменных $n=2$. Как легко видеть, все наши рассуждения применимы также при любом $n>2$, и видоизменение формул очевидно.

Функцию двух переменных (x, y)

$$G_{p,q}(x,y)=\sum_{k,l}^{\infty}\frac{a_{k,l}}{k!\,l!}x^k y^l \tag{1}$$

называют* целой функцией степени (p, q) двух комплексных переменных (x, y), если при любых $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$ $(\alpha+\beta=1)$

$$\lim_{k+l=\infty}\sqrt[k+l]{|a_{k,l}|}\leqslant p^{\alpha}q^{\beta}, \tag{2}$$

когда $\lim\limits_{k+l=\infty}(k/(k+l))=\alpha$, $\lim\limits_{k+l=\infty}(l/(k+l))=\beta$.

В этом определении участвуют верхние границы значений всех частных производных рассматриваемой функции. Подчиняя функцию $f(x, y)$ некоторым ограничениям роста, мы определим соответствующий класс функций конечной степени, используя лишь свойства (чистых) последовательных производных $\partial^k f(x, y)/\partial x^k$ и $\partial^l f(x, y)/\partial y^l$ при действительных значениях обеих переменных.

2. Мы будем говорить, что функция одной действительной переменной $f(x)$ есть функция конечного роста с майорантой $H(x)\geqslant 0$, если она удовлетворяет неравенству

$$|f(x)|\leqslant H(x) \qquad (-\infty<x<\infty), \tag{3}$$

---

* Условие (2) равнозначно

$$\overline{\lim_{k+l=\infty}}\sqrt[k+l]{|\partial G_{p,q}(x_0, y_0)/\partial x^k\partial y^l|}\leqslant p^{\alpha}q^{\beta}$$

при любых данных x_0, y_0 (действительных или комплексных), так как из (2) следует что при любом $\varepsilon>0$ имеем для $k+l\geqslant N_{\varepsilon}$ достаточно большого

$$|\partial^{k+l}G_{p,q}(x_0, y_0)/\partial x^k\partial y^l|<(p+\varepsilon)^k(q+\varepsilon)^l\sum_{i,j}^{\infty}[(p+\varepsilon)|x_0|]^i[(q+\varepsilon)|y_0|]^j/i!\,j!=$$

$$=(p+\varepsilon)^k(q+\varepsilon)^l e^{(p+\varepsilon)|x_0|+(q+\varepsilon)|y_0|}.$$

и при дополнительном условии, что $f(x)=G_p(x)$ — целая функция степени p, из (3) следуют для всех ее последовательных производных неравенства вида

$$|G_p^{(k)}(x)| \leqslant H_{k,p}(x) \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{4}$$

где при каждом данном x

$$\overline{\lim_{k=\infty}} \sqrt[k]{H_{k,p}(x)} \leqslant p. \tag{5}$$

Простейшим примером функций конечного роста являются ограниченные функции, имеющие майорантой постоянную $H(x)=M$; тогда $H_{k,p}(x)=Mp^k$.

Известно ([1-3]) также*, что модуль всякой целой функции $s_1(x)+it_1(x)$ нулевого рода является майорантой конечного роста, а именно, если $H(x)=|s_1(x)+it_1(x)|=\sqrt{s_1^2(x)+t_1^2(x)}$, всегда возможно представить $H(x)$ в виде $H(x)=|s(x)+it(x)|$, где $s(x)+it(x)$ не имеет корней в верхней полуплоскости; тогда в неравенствах (4)

$$H_{k,p}(x)=|\{[s(x)+it(x)]\,e^{-ipx}\}^{(k)}|.$$

Лемма 1. *Для того чтобы $H(x)$ была майорантой конечного роста, необходимо и достаточно, чтобы неравенство ($G_p(x)$ конечной степени p)*

$$|G_p(x)| \leqslant H(x) \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{3 bis}$$

влекло за собой во всей комплексной плоскости z

$$|G_p(z)| \leqslant H_p(z), \tag{6}$$

где $H_p(z)$ зависит только от $H(x)$ и p и

$$\overline{\lim_{|z|=\infty}} \frac{1}{|z|} \overset{+}{\log}\left|H_p(z)\right| \leqslant p \qquad (z=a+bi)$$

при любых фиксированных a.

Лемма 2. *Для того чтобы $H(x)$ была майорантой конечной степени, необходимо и достаточно, чтобы из всякой бесконечной совокупности целых функций $G_p(x)$, удовлетворяющих (3^{bis}), можно было извлечь последовательность, имеющую $\lim G_p(x)=G_p^*(x)$ во всех точках x любого отрезка (a, b); при этом всякая такая предельная функция $G_p^*(x)$ есть функция степени не выше p и, кроме того, последовательность $G_p(x)$, стремящихся к $G_p^*(x)$, может быть выбрана так, что и производные $G_p^{(k)}(x) \to G_p^{*(k)}(x)$ для всех $k \leqslant n$, где n — произвольно данное число.*

3. Аналогично, функцию $f(x, y)$ двух действительных переменных называем функцией **конечного роста**, если

$$|f(x, y)| \leqslant H(x)L(y) \qquad (-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty), \tag{7}$$

где $H(x)$ и $L(x)$ — некоторые майоранты конечного роста.

---

* Отметим также, что $H(x)=Me^x$ есть функция конечного роста; в этом случае $H_{k,p}(x)=Mp^ke^x$ при $p \geqslant 1$, $H_{k,p}(x)=0$ при $p<1$.

Исследованию различных классов функций конечного роста будет посвящена особая статья.

Например, благодаря следствию 1 ([2]), (стр. 164) $f(x, y)$ будет функцией конечного роста, если

$$\log(|f(x,y)|+1) \leqslant \frac{|x|}{[\log(|x|+1)]^{1+\alpha}} + \frac{|y|}{[\log(|y|+1)]^{1+\alpha}} \quad (\alpha > 0),$$

между тем как $f(x, y)$ не может быть конечного роста (по x), если

$$\log(|f(x, y)|+1) \geqslant |x|/[\log(|x|+1)],$$

и, тем более, если $f(x, y) \geqslant e^{c|x|}$ $(c > 0)$.

Теорема. *Если $f(x, y)$ конечного роста (т. е. удовлетворяет (7)) и при любом действительном y $f(x, y)$ есть функция степени p относительно x, а при любом действительном x $f(x, y)$ есть функция степени q относительно y, то $f(x, y)$ есть целая функция степени (p, q) комплексных переменных (x, y) и при всех действительных x, y соблюдаются неравенства*

$$|\partial^{k+l} f(x, y)/\partial x^k \partial y^l| \leqslant H_{k,p}(x)\, L_{l,q}(y) \tag{8}$$

$$(H_{0,p}(x) = H(x), \quad L_{0,q}(y) = L(y)).$$

Неравенства (8) в случае $k=0$ или $l=0$ вытекают непосредственно из определения. Кроме того, каждая из чистых (взятых только по одной переменной) последовательных частных производных $\partial^k f(x, y)/\partial x^k$ и $\partial^l f(x, y)/\partial y^l$, рассматриваемая, соответственно, как функция одной переменной x и одной переменной y, являются: первая — целой функцией степени p по x и вторая — степени q по y. Покажем, что $\partial^k f(x, y)/\partial x^k$ также должна (при любом действительном x) быть целой функцией степени q по y.

Действительно,

$$\frac{\Delta_h^{(k)} f(x, y)}{h^k} = \frac{f(x+kh, y) - kf(x+\overline{k-1}\,h, y) + \ldots + (-1)^k f(x, y)}{h^k} = \frac{\partial^k f(x', y)}{\partial x^k}$$

$(x < x' < x+h)$ является при любых x и y целой функцией степени q по y, причем

$$|\Delta_h^{(k)} f(x, y)/h^k| \leqslant ML(y), \quad \text{где} \quad M = \sup_{x \leqslant x' \leqslant x+h} H_{k,p}(x'). \tag{9}$$

Следовательно, согласно лемме 2, $\partial^k f(x, y)/\partial x^k = \lim\limits_{h=0} (\Delta_h^{(k)} f(x, y)/h^k)$ есть целая функция степени q по y; поэтому, принимая во внимание, что, как замечено, для $l=0$

$$|\partial^k f(x, y)/\partial x^k| \leqslant H_{k,p}(x)\, L(y),$$

имеем также при любых $l > 0$

$$|\partial^{k+l} f(x, y)/\partial x^k \partial y^l| \leqslant H_{k,p}(x)\, L_{l,q}(y). \tag{8}$$

При этом, если $G_p(x)$ есть функция, которая для рассматриваемого k осуществляет в точке x экстремум $G_p^{(k)}(x) = H_{k,p}(x)$ среди всех $|G_p(x)| \leqslant H(x)$, а $G_q(y)$ осуществляет экстремум $G_q^{(l)}(y) = L_{l,q}(y)$ среди всех функций степени q, удовлетворяющих $|G_q(y)| \leqslant L(y)$, видим, что верхняя грань (8) достигается, когда $f(x, y) = G_p(x)\, G_q(y)$ (есть произведение обеих экстремальных функций). Например, если $H(x)L(y)=C$ (постоянная), то $f(x, y)=C\cos p(x-a)\cos q(y-b)$, где a, b — постоянные, которые для каждой точки и для любых k, l можно определить так, что $\partial^{k+l} f(x, y)/\partial x^k \partial y^l = C p^k q^l$. Из неравенств (8) и (5) ясно, что

$$\overline{\lim_{k+l=\infty}} \sqrt[k+l]{H_{k,p}(x)\, L_{l,q}(y)} = p^\alpha q^\beta,$$

где $\alpha=\lim(k/(k+l))$, $\beta=\lim(l/(k+l))$, т. е. $f(x, y)$ удовлетворяет обычному определению целой функции степени (p, q) двух комплексных переменных* x, y.

Следствие 1. *Если функция $f(x_1, \ldots, x_k)$ действительных переменных ограничена $(-\infty < x_i < \infty,\ 0 < i \leqslant k)$, т. е. $|f(x_1, \ldots, x_k)| \leqslant M$, и если для всех i*

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|\partial^m f(x_1, \ldots, x_k)/\partial x_i^m|} \leqslant p_i, \tag{10}$$

то при любых $h_1 \geqslant 0, \ldots, h_k \geqslant 0$ $(h_1 + \ldots + h_k = m)$

$$|\partial^m f(x_1, \ldots, x_k)/\partial x_1^{h_1} \ldots \partial x_k^{h_k}| \leqslant M p_1^{h_1} \ldots p_k^{h_k}. \tag{11}$$

Обозначим через $d^m f(x_1, \ldots, x_k)/(d\bar{n})^m$ векториальную производную порядка m (т. е. производную по вектору, образующему углы $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ с осями $Ox_1, \ldots, Ox_k$). Тогда

$$\frac{d^m f(x_1, \ldots, x^k)}{(d\bar{n})^m} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_k}\cos\alpha_k\right)^{(m)}.$$

Поэтому, в силу (11), получаем

$$\left|\frac{d^m f(x_1, \ldots, x_k)}{(d\bar{n})^m}\right| \leqslant M \sum \frac{m!}{h_1! \ldots h_k!} |p_1 \cos\alpha_1|^{h_1} \ldots |p_k \cos\alpha_k|^{h_k} =$$
$$= M[p_1|\cos\alpha_1| + \ldots + p_k|\cos\alpha_k|]^m,$$

причем знак $=$ возможен (аналогичное неравенство получим, если f конечного роста). Таким образом:

Следствие 2. *Если $f(x_1, \ldots, x_k)$ ограничена или конечного роста и является функцией степени не выше p_i по каждой из переменных x_i, то после линейного преобразования с действительными коэффициентами*

$$x_i = \sum_{j=1}^{l} a_{ji} t + b_i \qquad (l \leqslant k)$$

$f(x_1, \ldots, x_k) = F(t_1, \ldots, t_l)$ преобразуется в целую функцию конечной степени $(P_1, \ldots, P_l)$ переменных $(t_1, \ldots, t_l)$, причем

$$P_j \leqslant \sum_{i=1}^{k} a_{ji} p_i.$$

Поступило
6 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Bernstein, C. R., **176**, 1782 (1923). [2] С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, М., 1937. [3] Н. И. Ахиезер, Изв. АН СССР, сер. матем., **10**, 411 (1946).

* Кроме того, из леммы 1 нетрудно вывести, что $|f(x, y)| \leqslant H_p(x) L_q(y)$ при всех комплексных x, y.