Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 5

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Член-корреспондент АН СССР И. Н. ВЕКУА

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ СИНУСОИДАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА

1. В случае плоского синусоидального колебания упругого цилиндра, ось которого перпендикулярна плоскости Oxy, компоненты смещения имеют вид

$$u = U(x, y)\frac{\cos \nu t}{\sin \nu t}, \qquad v = V(x, y)\frac{\cos \nu t}{\sin \nu t}, \qquad w = 0, \tag{1}$$

где ν — частота колебания.

Пусть T — поперечное сечение цилиндра плоскостью Oxy. Предположим, что T — односвязная область. В нашей работе ([1]) доказано, что в области T

$$\begin{aligned} U + iV = k\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} + l\nu^2 z^2\overline{\varphi(z)} + \overline{\psi(z)} + \\ + \int_0^z \varphi(t) H_1(\bar z, z - t)\,dt + \int_0^{\bar z} \overline{\varphi(t)} H_1^*(z, \bar z - \bar t)\,d\bar t + \\ + \int_0^z \psi(t) H_2(\bar z, z - t)\,dt + \int_0^{\bar z} \overline{\psi(t)} H_2^*(z, \bar z - \bar t)\,d\bar t, \end{aligned} \tag{2}$$

где $z = x + iy$, $\bar z = x - iy$,

$$\begin{aligned} H_1(X, Y) &= \frac{X}{\alpha - \beta}[\alpha^2 L_1(\alpha XY) + \beta^2 L_1(\beta XY)], \\ H_2(X, Y) &= \frac{\alpha\beta Y}{\alpha - \beta}[L_1(\alpha XY) + L_1(\beta XY)], \\ H_1^*(X, Y) &= \frac{X^3}{\beta - \alpha}[\alpha^3 L_3(\alpha XY) - \beta^3 L_3(\beta XY)], \\ H_2^*(X, Y) &= \frac{\alpha\beta X}{\beta - \alpha}[L_1(\alpha XY) - L_1(\beta XY)], \end{aligned} \tag{3}$$

$$L_n(X) = X^{-n/2} J_n(2\sqrt{X}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-X)^k}{k!\,(k+n)!},$$

$$\alpha = \frac{\rho\nu^2}{4(\lambda + \mu)}, \quad \beta = \frac{\rho\nu^2}{4\mu}, \quad k = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}, \quad l = \frac{\lambda + 3\mu}{8\mu(\lambda + 2\mu)}; \tag{4}$$

$\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — произвольные голоморфные функции в T, причем $\varphi(0)=0$; φ, ψ однозначно определятся при помощи U, V. При $\nu=0$ будем иметь известную формулу, выражающую компоненты смещения плоского деформированного состояния в статическом случае ([2]).

2. Формула (2) может иметь различные применения. В частности, ее можно использовать для решения граничных задач, когда на границе области известны смещения или силы. В обоих случаях получаются интегральные уравнения, которые эквивалентны задаче для любого значения частоты ν. В настоящей работе мы ограничиваемся рассмотрением задачи, когда на границе заданы значения U, V; эту задачу в дальнейшем назовем задачей I. Эта задача приводится к следующей задаче.

Требуется найти входящие в (2) голоморфные в T функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ так, чтобы на границе имело место условие

$$U+iV=f(t) \qquad (\text{на } L), \tag{5}$$

где $f(t)$ — заданная функция точки $t \in L$, причем L — граница области T; мы ее считаем простой замкнутой кривой, декартовы координаты которой имеют производные по дуге до 5-го порядка. Функцию $f(t)$ будем считать дифференцируемой по дуге до 3-го порядка.

Кроме того, будем предполагать, что $\varphi''(z)$ и $\psi'(z)$ непрерывны в $T+L$; это требование обеспечивает непрерывность компонентов тензора напряжения в $T+L$.

При этих условиях можно доказать ([3]) существование единственной функции $\omega(t)$, непрерывной в смысле Гельдера на L такой, что при $z \in T$

$$\begin{gathered}
\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)\,dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)\,dt}{t}, \\
\psi(z)=\frac{k}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega(t)}\,dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{t}\omega(t)\,dt}{(t-z)^2}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)\,d\bar{t}}{t-z}.
\end{gathered} \tag{6}$$

Подставляя эти формулы в (2) и переходя к пределу, когда точка z стремится из области T к некоторой точке $t_0 \in L$, получим

$$\begin{gathered}
k\omega(t_0)+\frac{1}{2}l\nu^2 t_0^2\overline{\omega(t_0)}-\frac{l\nu^2 t_0^2}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega(t)}\,d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{t}_0}+ \\
+\int_L K(t_0,t)\,\omega(t)\,dt+\int_L K^*(t_0,t)\,\overline{\omega(t)}\,d\bar{t}=f(t_0),
\end{gathered} \tag{7}$$

где

$$\begin{gathered}
K(t_0,t)=\frac{k}{2\pi i}\left[\frac{d}{dt}\lg\frac{t-t_0}{t(\bar{t}-\bar{t}_0)}-\frac{d\bar{t}}{dt}\int_0^{\bar{t}}\frac{H_2^*(t_0,\bar{t}_0-\bar{t}_1)\,d\bar{t}_1}{\bar{t}-\bar{t}_1}\right]-\frac{\bar{t}H_2(\bar{t}_0,t_0)}{2\pi i t}+ \\
+\frac{1}{2\pi i}\int_0^{t_0}\left[\frac{t_1H_1(\bar{t}_0,t_0-t_1)}{t}-\bar{t}\frac{\partial}{\partial t_1}H_2(\bar{t}_0,t_0-t_1)-\frac{d\bar{t}}{dt}H_2(\bar{t}_0,t_0-t_1)\right]\frac{dt_1}{t-t_1},
\end{gathered} \tag{8}$$

$$K^*(t_0, t) = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dt}\frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0} + \frac{l\nu^2 t_0^2}{2\pi i\bar{t}} + \frac{k}{2\pi i}\frac{dt}{d\bar{t}}\int\limits_0^{t_0}\frac{H_2(\bar{t}_0, t_0 - t_1)}{t - t_1}\,dt_1 +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{\bar{t}_0}\left[-\frac{\bar{t}_1 H_1^*(t_0, \bar{t}_0 - \bar{t}_1)}{\bar{t}} + t\frac{\partial}{\partial t_1}H_2^*(t_0, \bar{t}_0 - \bar{t}_1) +\right.$$

$$\left.+ \frac{dt}{d\bar{t}}H_2^*(t_0, \bar{t}_0 - \bar{t}_1)\right]\frac{d\bar{t}_1}{\bar{t} - \bar{t}_1} + \frac{tH_2^*(t_0, \bar{t}_0)}{2\pi i\bar{t}}.$$

Переходя в (7) к сопряженному равенству, мы получим систему двух сингулярных интегральных уравнений с двумя неизвестными функциями $\omega(t)$, $\overline{\omega(t)}$, эквивалентную задаче I для любого значения частоты ν. Эта система будет нормального типа с индексом, равным нулю [4].

Применяя известные приемы регуляризации [4,5], мы можем привести эту систему к эквивалентной системе уравнений Фредгольма, причем приведение требует применения таких операций, которые выражаются явно через заданные функции.

3. При $\nu = 0$ уравнение (7) переходит в уравнение Фредгольма

$$k\omega(t_0) + \frac{k}{2\pi i}\int\limits_L \omega(t)\,d\lg\frac{t - t_0}{t(\bar{t} - \bar{t}_0)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \overline{\omega(t)}\,d\frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0} = f(t_0), \tag{9}$$

которое разрешимо для любой правой части и дает решение задачи I в статическом случае [3].

Но вышеупомянутая система уравнений Фредгольма, эквивалентная уравнению (7), имеет ядра, которые суть мероморфные функции параметра ν. Так как $\nu = 0$ не является для этой системы собственным значением, то, согласно теореме Тамаркина [6], резольвента будет мероморфной функцией параметра ν, причем нетрудно доказать, что ее полюса расположены на действительной оси и представляют собой частоты собственных колебаний цилиндра. В частности, отсюда вытекает, что для достаточно малых значений ν задача I всегда разрешима.

Замечание 1. Другие интегральные уравнения для задачи I получены Д. И. Шерманом [7], но в его работе отсутствует доказательство эквивалентности для любого ν.

Замечание 2. Если в (2) вместо $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ подставим выражения

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t)\,dt}{t - z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t)\,dt}{t},$$

$$\psi(z) = \frac{k}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{\omega(t)}\,dt}{t - z} + \frac{l\nu^2}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\bar{t}^2\omega(t)\,dt}{t - z} + \tag{10}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\bar{t}\omega(t)\,dt}{(t - z)^2} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t)\,d\bar{t}}{t - z},$$

то получим для $\omega(t)$ интегральное уравнение Фредгольма. Недостаток этого способа заключается в отсутствии доказательства эквивалентности. Однако, как нетрудно видеть, согласно упомянутой выше теореме Тамаркина эквивалентность будет иметь место для всех значений ν, за исключением, быть может, дискретного ряда их, причем для малых значений этого параметра эквивалентность, очевидно, будет соблюдаться. Поэтому для малых значений ν решение задачи можно искать в виде степенного ряда относительно этого параметра.

Поступило
15 III 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Н. Векуа, ДАН, **16**, № 3 (1937). [2] Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи теории упругости, 1935. [3] Д. И. Шерман, ДАН, **27**, № 9 (1940). [4] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, 1946. [5] Н. П. Векуа, Сообщ. АН ГрузССР, **4**, № 3 (1943). [6] I. D. Tamarkin, Ann. Math., **28**, № 2 (1927). [7] Д. И. Шерман, ДАН, **48**, № 9 (1945).