

Член-корреспондент АН СССР В. В. СОКОЛОВСКИЙ
РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГО-ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ВОЛН
В СТЕРЖНЯХ

Настоящая работа содержит исследование вопроса о распространении волн в стержнях, материал которых обладает упругими и вязко-пластическими свойствами.

В качестве основной зависимости между напряжением σ и деформацией ε при простом растяжении или сжатии примем дифференциальные соотношения*

$$E \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} \text{ при } |\sigma| \leq \sigma_s; \quad E \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} + \chi k (|\sigma| - \sigma_s) \text{ при } |\sigma| \geq \sigma_s, \quad (1)$$

предложенные К. Гогенемзером, В. Прагером и А. Ю. Ишлинским.

Здесь приняты обозначения: $\chi = \text{sign } \sigma$; E — модуль упругости; σ_s — предел текучести; $\varepsilon_s = \sigma_s / E$ — деформация, соответствующая пределу текучести; k — физическая константа; t — время.

Поместим начало абсцисс $x=0$ в конце стержня, положительную полуось абсцисс $x > 0$ направим вдоль оси стержня. Обозначим через $\omega(x)$ площадь поперечного сечения с абсциссой x , а через ω_0 — площадь концевого поперечного сечения; для цилиндрического стержня $\omega = \omega_0$, для конического стержня $\omega = \omega_0 (1 + x/d)^2$, где d — размерный параметр.

Дифференциальное уравнение движения поперечных сечений стержня имеет вид (ρ — плотность материала):

$$\frac{\partial}{\partial x} (\omega \sigma) = \rho \omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2), если вспомнить, что $\varepsilon = du / dx$ и $v = du / dt$, приводят к следующей системе уравнений:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\omega'}{\omega} \sigma, \quad E \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \chi k \varphi (|\sigma| - \sigma_s), \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (3)$$

где функция φ определена равенствами

$$\varphi(z) = 0 \quad (z \leq 0); \quad \varphi(z) = z \quad (z \geq 0).$$

Движение поперечных сечений стержня, отвечающее решению уравнений (3), называется волной; точка раздела двух волн, перемещающаяся с течением времени, — фронтом.

Два первых уравнения (3) содержат σ и v и составляют систему гиперболического типа. Уравнения характеристик этой системы

$$x = \pm ct + \text{const}, \quad cd\sigma \mp Edv + \left\{ c \frac{\omega'}{\omega} \sigma \pm \chi k \varphi (|\sigma| - \sigma_s) \right\} dx = 0, \quad (4)$$

где $c^2 = E / \rho$ устанавливают законы распространения фронтов волн и законы изменения σ и v вдоль этих фронтов.

* Соотношения (1) могут быть обобщены путем замены $(|\sigma| - \sigma_s)$ на $f(|\sigma| - \sigma_s)$, причем функция f устанавливается экспериментально.

Волны, на фронтах которых σ , v и ε претерпевают скачки, называются прерывными или ударными.

Скачки σ , v и ε на каком-нибудь фронте, т. е. конечные приращения этих величин, происходящие в момент прохождения этого фронта, будем обозначать $[\sigma]$, $[v]$ и $[\varepsilon]$.

Условия кинематической и динамической совместности на фронтах прерывных волн имеют вид

$$c[\varepsilon] \pm [v] = 0, \quad \rho c[v] \pm [\sigma] = 0 \text{ при } x = \pm ct + \text{const}. \quad (5)$$

Ниже будем пользоваться безразмерными величинами*

$$\tau = kt, \quad \xi = k \frac{x}{c}, \quad \delta = k \frac{d}{c}, \quad S = \frac{|\sigma|}{\sigma_s}, \quad E = x \frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}, \quad V = x \frac{v}{c\varepsilon_s}, \quad \Omega = \frac{c}{k} \frac{\omega'}{\omega},$$

сохраняя за ними названия соответствующих размерных величин.

Уравнения (4) принимают вид

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial S}{\partial \xi} + \Omega S, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi} = \frac{\partial S}{\partial \tau} + \Phi(S - 1), \quad \frac{\partial E}{\partial \tau} = \frac{\partial V}{\partial \xi}, \quad (6)$$

где функция Φ определена равенствами

$$\Phi(\zeta) = 0 \quad (\zeta \leq 0), \quad \Phi(\zeta) = \zeta \quad (\zeta \geq 0).$$

Уравнения характеристик (4) будут

$$\xi = \pm \tau + \text{const}, \quad dS \mp dV + \{\Omega S \pm \Phi(S - 1)\} d\xi = 0. \quad (7)$$

Условия кинематической и динамической совместности на фронтах прерывных волн дают

$$[E] \pm [V] = 0, \quad [V] \pm [S] = 0 \text{ при } \xi = \pm \tau + \text{const}. \quad (8)$$

Уравнения (6) приводят к канонической системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial S}{\partial \alpha} &= \Omega S + \Phi(S - 1), \quad \frac{\partial V}{\partial \beta} + \frac{\partial S}{\partial \beta} = \Omega S - \Phi(S - 1), \\ 2\alpha &= \tau + \xi, \quad 2\beta = \tau - \xi, \end{aligned} \quad (9)$$

служащей для определения S и V , и к уравнению

$$\frac{\partial E}{\partial \tau} = \frac{\partial S}{\partial \tau} + \Phi(S - 1), \quad (10)$$

дающему возможность найти E .

Уравнения (9) при $\Phi(\zeta) = 0$ для цилиндрического и конического стержней имеют замкнутые решения, уравнения (9) при $\Phi(\zeta) = \zeta$ для цилиндрического стержня приводятся к уравнениям телеграфного вида.

Рассмотрим прямую волну, распространяющуюся в полубесконечном $\xi \geq 0$ ($x \geq 0$) стержне и образовавшуюся в результате возмущения на его конце $\xi = 0$ ($x = 0$), внезапно возникшего при $\tau = 0$ ($t = 0$) и изменяющегося непрерывно при $\tau > 0$ ($t > 0$).

Условия кинематической и динамической совместности (8) на переднем фронте $\xi = \tau$ ($x = ct$) дают

$$S = E = -V. \quad (11)$$

Заметим, что значения этих величин на конце $\xi = 0$ в момент $\tau = 0$, которые будем отмечать индексом „0“, также связаны равенствами $S_0 = E_0 = -V_0$.

Уравнение, определяющее S на переднем фронте $\xi = \tau$, может быть

* Безразмерную деформацию не следует смешивать с модулем упругости, обозначенным выше той же буквой.

получено из уравнений (7) и (11) в виде

$$2 \frac{dS}{d\xi} + \Omega S + \Phi(S-1) = 0. \quad (12)$$

Решение уравнения (12) дает:

для цилиндрического стержня, когда $\Omega=0$,

$$S=1 + (S_0-1) \exp(-\xi/2); \quad (13)$$

для конического стержня, когда $\Omega = 2/(\xi + \delta)$,

$$S = 1 + \frac{2}{\xi + \delta} \left(\exp \frac{\gamma - \xi}{2} - 1 \right) \quad (0 \leq \xi \leq \gamma); \quad S = \frac{\gamma + \delta}{\xi + \delta} \quad (\xi \geq \gamma), \quad (14)$$

где $\gamma = 2 \ln \left\{ 1 + (S_0 - 1) \frac{\delta}{2} \right\}$.

Формулы (13) и (14) имеют место при $S_0 \geq 1$.

Уравнение (10) и условие (11) приводят к формуле

$$E = S + \int_{\xi}^{\tau} \Phi \{ S(\tau, \xi) - 1 \} d\tau. \quad (15)$$

Пусть, например, в поперечном сечении с абсциссой ξ напряжение S при $\tau > \xi$ изменяется непрерывно, причем

$$S \geq 1 \text{ при } \xi \leq \tau \leq \tau(\xi); \quad S \leq 1 \text{ при } \tau \geq \tau(\xi),$$

где $\tau = \tau(\xi)$ — момент, когда $S = 1$.

Деформация E имеет вид:

$$E = S + \xi - \tau + \int_{\xi}^{\tau} S(\tau, \xi) d\tau \quad (\xi \leq \tau \leq \tau(\xi)); \quad E = S + E_r(\xi) \quad (\tau \geq \tau(\xi)). \quad (16)$$

Остаточная деформация $E_r(\xi)$ равна:

$$E_r(\xi) = \xi - \tau(\xi) + \int_{\xi}^{\tau(\xi)} S(\tau, \xi) d\tau = E_*(\xi) - 1.$$

Индексом * обозначена деформация в момент $\tau = \tau(\xi)$.

Метод решения задач изложим применительно к полубесконечному $\xi \geq 0$ коническому стержню, на конце $\xi=0$ которого задано ($S_0 > 1$):

$$S = S_0(1 - \tau/\tau_1) \quad (0 \leq \tau \leq \tau_1). \quad (17)$$

Деформация E на конце $\xi=0$ в силу формул (16) будет

$$E = S - \tau + S_0 \tau \left(1 - \frac{\tau}{2\tau_1} \right) \quad (0 \leq \tau \leq \tau_*); \quad E = S + S_0 \frac{\tau_*^2}{2\tau_1} \quad (\tau_* \leq \tau \leq \tau_1),$$

где $\tau_* = \tau_1 (S_0 - 1) / S_0$.

На рис. 1 изображены области движения, построенные в плоскости $\tau\xi$; точки μ_{10} и μ_* имеют координаты $\tau = \xi = \gamma$ и $\tau = \tau_*$, $\xi = 0$.

Напряжение S и скорость V находятся путем построения решения уравнений (9) по данным (11) и (14) вдоль характеристики $\xi = \tau$ ($\alpha = \xi$, $\beta = 0$) и по данным (17) вдоль оси $\xi = 0$ ($\alpha = \beta = \tau/2$). Сначала строится решение уравнений (9) при $\Phi(\zeta) = \zeta$ в треугольнике $\mu_{00}\mu_{10}\mu_{11}$ и находится линия $\mu_{10}\mu_*$, вдоль которой $S=1$. Это решение имеет механический смысл лишь в криволинейном треугольнике $\mu_{00}\mu_{10}\mu_*$.

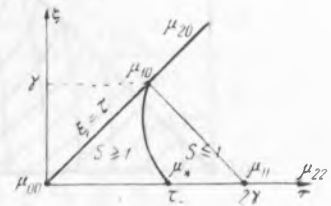


Рис. 1

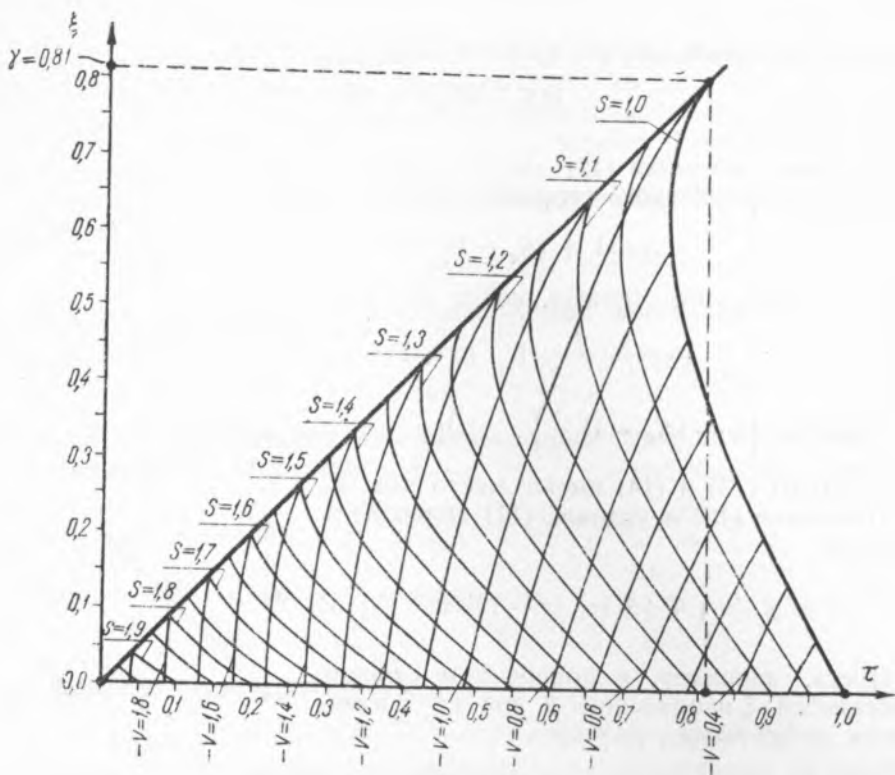


Рис. 2

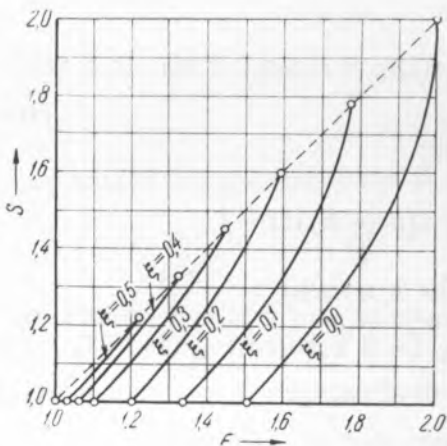


Рис. 3

Значения остаточной деформации в различных сечениях стержня будут ($\gamma = 0,81$):

ξ	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,81
E_r	0,50	0,32	0,20	0,12	0,08	0,04	0,02	0,01	0,00	0,00

На рис. 2 изображены области движения в плоскости $\tau\zeta$ и нанесены линии $S = \text{const}$, $V = \text{const}$; на рис. 3 построены графики зависимостей между S и E для значений $S \geq 1$ в различных сечениях стержня.

Институт механики
Академии Наук СССР

Поступило
20 III 1948