Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 5

МАТЕМАТИКА

С. А. ЧУНИХИН

О СИЛОВСКИ-ПРАВИЛЬНЫХ ГРУППАХ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 19 III 1948)

§ 1. В статье (1) нами было получено обобщение известной теоремы Силова — Голла о разрешимых группах на более общий класс групп, названных тогда нами П-отделимыми группами. Сейчас мы этот результат обобщим дальше, освободив его от арифметических условий, отчего он приобретает чисто конструктивный характер.

§ 2. Определение 1. Пусть П — некоторое непустое множество простых чисел и пусть $\mathfrak{G}$ — некоторая группа порядка g. Тогда всякий делитель $m>1$ числа g такой, что все простые делители m входят в П и $(m, g/m)=1$, а также и 1 назовем П-силовским делителем порядка $\mathfrak{G}$.

Определение 2. Если для группы $\mathfrak{G}$ можно указать такое непустое множество простых чисел П, что всякому П-силовскому делителю m порядка $\mathfrak{G}$ соответствует в $\mathfrak{G}$ по крайней мере одна разрешимая подгруппа порядка m и все подгруппы каждого такого порядка сопряжены в $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}$ назовем П-силовски-правильной или силовски-правильной (относительно П).

Из этих определений следует, что все группы, порядки которых не делятся ни на одно простое число из П, относятся к разряду П-силовски-правильных.

Теорема. *Если все композиционные факторы группы $\mathfrak{G}$ являются П-силовски-правильными, то и сама $\mathfrak{G}$ тоже П-силовски-правильная.*

Доказательство является некоторым видоизменением доказательства основной теоремы статьи (1). Поэтому обозначения сохраним прежние. Наметим основные моменты доказательства.

Пусть m' и m_1 — произведения наивысших входящих, соответственно, в g/n_1 и n_1 степеней всех простых делителей числа m. Так как $(m, g/m)=1$, то из этого следует, что m можно представить в виде $m=m'm_1$.

Далее рассматриваются все 4 возможных случая.

1) $m'=1$, $m_1=m$. В этом случае доказательство протекает совершенно таким же образом, как в случае 1) работы (1).

2) $m'=m$, $m<g/n_1$. Так как группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_1$ по условию П-силовски-правильная, то $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_1$, на основании определения 2, будет содержать подгруппы порядка m, причем все они будут разрешимыми и в $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_1$ сопряженными. Используя их разрешимость, можно показать, что соответствующие им собственные подгруппы $\mathfrak{G}$ будут порядка $mn_1<g$ и с П-силовски-правильными композиционными факторами. Отсюда следует существование разрешимой подгруппы порядка m в группе $\mathfrak{G}$. Используя далее сопряженность всех подгрупп порядка m из $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_1$, можно установить сопряженность и всех подгрупп порядка m из $\mathfrak{G}$.

3) $m' = m$, $m = g / n_1$. Этот случай, как нетрудно убедиться, сводится к теореме Силова.

4) $m' > 1$, $m_1 > 1$, $m \leqslant g$. Этот случай аналогичен случаю 2) доказательства основной теоремы статьи [1], с тем отличием, что в случае $\lambda = 1$ применяется не теорема Силова, а рассматривается фактор-группа $\mathfrak{G} / \mathfrak{S}_1$, где $\mathfrak{S}_1$ — одна из подгрупп порядка m_1 группы $\mathfrak{N}_1$.

В случае $\lambda > 1$ приходится установить, прежде всего, что $\mathfrak{B}_{\mathfrak{S}_1}$ будет того же типа, что и сама $\mathfrak{G}$. Это дает существование искомых подгрупп. Доказательство же их сопряженности протекает совершенно так же, как и в статье [1] для случая $\lambda > 1$.

После всего этого основная теорема статьи [1] получается уже как частный случай в следующей форме:

Всякая П-*отделимая группа является* П-*силовски-правильной.*

Поступило
12 III 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Чунихин, ДАН, **59**, № 3 (1948).