Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 5

МАТЕМАТИКА

Г. Н. ПОЛОЖИЙ

ОСОБЫЕ ТОЧКИ И ВЫЧЕТЫ p-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

(Представлено академиком И. Г. Петровским 15 III 1948)

В предыдущей статье ([1]) мной было введено понятие p-аналитических функций комплексного переменного и были установлены для них принцип сохранения области, теорема единственности, формула Коши и теорема Коши.

В настоящей заметке я даю для этих функций классификацию изолированных особых точек, доказываю теоремы Вейерштрасса и Луивилля и строю вычеты, о которых доказываю теорему, совершенно аналогичную основной теореме о вычетах аналитических функций.

В дополнение к определению p-аналитической функции условимся говорить, что функция $f(z)=u+iv$ комплексного переменного $z=x+iy$ p-аналитическая в точке $z_0=\infty$ тогда, когда она p-аналитическая в точке $t=0$, будучи рассматриваема как функция от $t=1/z$.

Для того чтобы было удобнее судить о поведении p-аналитической функции в зависимости от ее p-характеристики, будем считать, что p-характеристика $p(z)$ удовлетворяет условию α) в окрестности точки $z_0\neq\infty$, если $\partial p/\partial x$ и $\partial p/\partial y$ в этой окрестности непрерывны и ограничены по абсолютной величине, а $\lim\limits_{z\to z_0} p(z)$ существует и положителен; условию β) в некоторой области, содержащей точку $z_0\neq\infty$, если $\partial p/\partial x$ и $\partial p/\partial y$ в этой области удовлетворяют условию Гельдера. В окрестности точки $z_0=\infty$ условие α) для p-характеристики $p(z)$ будем считать удовлетворяющимся, если $p(z)$ удовлетворяет этому условию в окрестности точки $t=0$, будучи рассматриваема как функция от $t=1/z$. Аналогично, условие β) для p-характеристики $p(z)$ будем считать удовлетворяющимся в той или иной области, содержащей точку $z_0=\infty$, если $p(z)$ удовлетворяет этому условию в некоторой области, содержащей точку $t=0$, как функция от $t=1/z$.

Определение. Точку z_0 расширенной плоскости $z=x+iy$, в окрестности которой однозначная функция $\varphi(z)=\alpha+i\beta$ комплексного переменного z непрерывна или, в частности, p-аналитическая, будем называть изолированной особой точкой функции $\varphi(z)$, причем устранимой особой точкой, если $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)$ существует и конечен; полюсом, если $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)$ существует и равен бесконечности; существенно особой точкой, если $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)$ не существует.

Используя известные свойства кратных интегралов ([2]), я доказываю следующую лемму.

Лемма о двойном интеграле. *Пусть $\Phi(z)$ — однозначная функция от $z=x+iy$, определенная в круге $|z|\leqslant R<\infty$. Тогда двойной интеграл*

$$J(\zeta)=\iint\limits_{|z|<R}\frac{\Phi(z)}{z-\zeta}\,dx\,dy\qquad(\zeta=\xi+i\eta)$$

в круге $|\zeta|<R$: a) *удовлетворяет условию Гельдера, если функция $\Phi(z)$ в круге $|z|\leqslant R$ имеет конечное число точек разрыва и ограничена по модулю;* b) *имеет непрерывные частные производные по ξ и η первого порядка, если функция $\Phi(z)$ в круге $|z|\leqslant R$ удовлетворяет условию Гельдера.*

Применяя интегральные представления ([1]), я доказываю следующую лемму.

Лемма об особых точках. *Пусть функция $F(z)=U+iV$ комплексного переменного $z=x+iy$, в окрестности точки $z_0\neq\infty$ однозначная и непрерывная вместе со своими частными производными по x и y первого порядка, удовлетворяет равенству*

$$\frac{\partial F}{\partial x}+i\frac{\partial F}{\partial y}=aF+b\overline{F},$$

где a и b — однозначные функции от z, непрерывные и ограниченные по модулю в окрестности точки z_0.

Тогда:

a) *если для некоторого целого числа n ($n\geqslant 0$ или $n<0$) в окрестности точки z_0 имеет место неравенство*

$$|F(z)(z-z_0)^n|<\frac{M}{|z-z_0|^{1-\delta}},$$

где M и δ — положительные постоянные, то точка z_0 есть устранимая особая точка функции $\psi(z)=F(z)(z-z_0)^n$;

b) *если точка z_0 есть существенно особая точка функции $F(z)$, то в окрестности этой точки функция $F(z)$ принимает значения, сколь угодно близкие к любому конечному или равному бесконечности комплексному числу C;*

c) *если z_0 есть точка накопления нулей функции $F(z)$ и если $F(z)$ не равна тождественно нулю, то точка z_0 есть существенно особая точка функции $F(z)$ и при всяком целом положительном числе n*

$$\varlimsup_{r\to 0}\max_{|z-z_0|=r}|F(z)(z-z_0)^n|=\infty.$$

Замечая, что для p-аналитической функции $f(z)=u+iv$ с p-характеристикой $p=p(z)$, имеющей непрерывные частные производные по x и y первого порядка, дифференциальные уравнения, ее определяющие:

$$u_x=\frac{1}{p}v_y,\qquad u_y=-\frac{1}{p}v_x,$$

эквивалентны равенству

$$\frac{\partial f^*}{\partial x}+i\frac{\partial f^*}{\partial y}=\frac{p_x+ip_y}{2p}\overline{f}^*,$$

где $f^*(z)=\sqrt{p}\,u+i\dfrac{v}{\sqrt{p}}$, из доказанных лемм легко получаем следующие теоремы.

Теорема. *Однозначная p-аналитическая функция в окрестности изолированной существенно особой точки, в которой ее p-характеристика удовлетворяет условию α), принимает значения, сколь угодно близкие конечному или равному бесконечности комплексному числу C.*

Теорема. *Пусть однозначная p-аналитическая функция $f(z)=u+iv$ с p-характеристикой $p(z)$ в окрестности изолированной особой точки z_0 ограничена по модулю.*

Тогда:

a) *точка z_0 будет устранимой особой точкой функции $f(z)$, если $p(z)$ в ее окрестности удовлетворяет условию α);*

b) *точка z_0 будет точкой p-аналитичности функции $f(z)$, если $p(z)$ в некоторой области, содержащей эту точку, удовлетворяет условию β) и если положено $f(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.*

Учитывая принцип максимума модуля p-аналитической функции, принцип сохранения области ([1]) и лемму об особых точках, получаем следующую теорему.

Теорема. *Если функция $f(z)=u+iv$, p-аналитическая во всякой конечной части плоскости $z=x+iy$, ограничена по модулю при подходе к бесконечности, в окрестности которой ее p-характеристика $p(z)$ удовлетворяет условию α), и если $\partial p/\partial x$ и $\partial p/\partial y$ удовлетворяют условию Гельдера во всякой конечной части плоскости $z=x+iy$, то функция $f(z)$ тождественно равна постоянной.*

Используя свойства квазиконформных отображений ([3]) и лемму о растяжениях ([1]), из доказанных выше лемм получаем следующую теорему.

Теорема. *Если точка $z_0\neq\infty$ есть полюс p-аналитической функции $f(z)=u+iv$ с p-характеристикой $p(z)$, удовлетворяющей условию β) в некоторой области, содержащей эту точку, и если существует положительное число ρ такое, что $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^\rho=0$, то существует целое положительное число n, называемое порядком этого полюса, и существуют положительные постоянные A и B такие, что в окрестности точки z_0 имеет место неравенство*

$$A<|f(z)(z-z_0)^n|<B,$$

причем $\lim\limits_{z\to z_0} f^*(z)(z-z_0)^n$, где $f^*(z)=\sqrt{p}u+i\dfrac{v}{\sqrt{p}}$, существует и отличен от нуля и от бесконечности.

Определение. Если точка $z_0\neq\infty$ для p-аналитической функции $f(z)=u+iv$ с p-характеристикой $p(z)$, удовлетворяющей условию β) в некоторой области, содержащей эту точку, есть полюс первого порядка, то число $c_{-1}=A_0+iB_0$, определенное равенством

$$c_{-1}=\sqrt{p(z_0)}\lim_{z\to z_0} f^*(z)(z-z_0),$$

где $f^*(z)=\sqrt{p}u+i\dfrac{v}{\sqrt{p}}$, будем называть вычетом функции $f(z)$ в точке z_0.

Заметим, что p-аналитическая функция $f(z)=u+iv$, о которой говорится в этом определении, в силу леммы об особых точках, в окрестности точки z_0 может быть представлена в виде

$$f(z)=\frac{A_0\cos\theta+B_0\sin\theta}{r}\,\frac{1}{p(z_0)}+i\,\frac{-A_0\sin\theta+B_0\cos\theta}{r}+\mu(z),$$

где $r=|z-z_0|$, $\theta=\arg(z-z_0)$, $\mu(z)$ — функция от z такая, что $\lim\limits_{z\to z_0}\mu(z)(z-z_0)=0$.

Отсюда получаем следующую теорему.

Теорема. *Если две p-аналитические функции с p-характеристикой $p(z)$, удовлетворяющей условию β) в некоторой области, содержащей точку $z_0\neq\infty$, имеют эту точку z_0 в качестве полюсов первых порядков с одинаковыми вычетами, то их разность есть функция p-аналитическая в точке z_0.*

Предположим, что p-характеристика $p(z)$ имеет непрерывные частные производные по x и y первого и второго порядков в некоторой односвязной области, содержащей некоторую ограниченную область T вместе с ее границей S, разложимой на конечное число непрерывных кривых, на каждой из которых x и y изменяются монотонно. Тогда, учитывая свойства сопряженных переменных p-характеристики ([1]), получаем, что, если однозначная функция $f(z)=u+iv$, p-аналитическая с данной p-характеристикой $p(z)$ в каждой точке замкнутой области $T+S$, кроме конечного числа внутренних точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, где она имеет полюсы первых порядков с вычетами, соответственно, $c_{-1}^{(1)}=A_1+iB_1$, $c_{-1}^{(2)}=A_2+iB_2, \ldots, c_{-1}^{(n)}=A_n+iB_n$, то имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S u\,d\tilde{Z}+iv\,dZ=\sum_{k=1}^{\infty}(A_k Z_x(z_k)+iB_k Z_{iv}(z_k)),$$

где $Z(z)$ и $\tilde{Z}(z)$ — сопряженные переменные данной p-характеристики $p(z)$ для области T.

Саратовский государственный университет

Поступило
29 I 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Н. Положий, ДАН, 58, № 7 (1947). [2] E. Hopf, Math. Z., 34, 203 (1931). [3] М. Лаврентьев, Матем. сб., 42 : 4 (1935).