Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 5

МАТЕМАТИКА

С. М. ЛОЗИНСКИЙ

ОБ ИНДИКАТРИСЕ BANACH'A

(Представлено академиком В. И. Смирновым 11 III 1948)

Введем следующие обозначения:

$X(t)$ — функция вещественная и конечная при $0 \leqslant t \leqslant 1$;

S: $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1$ — разбиение интервала $0 \leqslant t \leqslant 1$;

$T^1_{t=0}(X) \equiv T^1_{t=0}[(X(t)] \equiv \sup\limits_{S} \sum\limits_{k=1}^{n} |X(t_k) - X(t_{k-1})|$ — полная вариация функции $X(t)$ в интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$;

V — множество тех функций $X(t)$, для которых $T^1_{t=0}(X) < +\infty$;

C — множество всех функций $X(t)$, непрерывных на $0 \leqslant t \leqslant 1$;

U_1 — множество тех функций $X(t)$, которые имеют только разрывы первого рода, т. е. таких, для которых при $0 \leqslant t < 1$ существует конечный предел

$$X(t+) = \lim_{h \to 0+} X(t+h),$$

а при $0 < t \leqslant 1$ существует конечный предел

$$X(t-) = \lim_{h \to 0+} X(t-h).$$

Полагаем еще

$$X(0-) \equiv X(0), \qquad X(1+) \equiv X(1).$$

Если $a, b,\ a \leqslant b$, суть вещественные числа, то положим

$$[a, b] = \mathop{\mathscr{E}}_{x} \{a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Определение 1. Пусть $X \in U_1$. Пусть x — вещественное число и $t \in [0,1]$. Тогда могут иметь место следующие случаи:

1) $x = X(t)$;

2) $x \in [\min\{X(t-), X(t)\}, \max\{X(t-), X(t)\}], \quad x \neq X(t)$;

3) $x \in [\min\{X(t), X(t+)\}, \max\{X(t), X(t+)\}], \quad x \neq X(t)$.

Будем говорить, что

t не есть корень уравнения

$$X(t) = x, \tag{1}$$

если не имеет места ни один из случаев 1), 2), 3);

t есть простой корень уравнения (1), если имеет место ровно один из случаев 1), 2), 3);

t есть двойной корень уравнения (1), если имеют место два из случаев 1), 2), 3).

Замечание. Легко видеть, что все три случая 1), 2), 3) не могут ни при каких x, t иметь место одновременно.

Определение 2. Пусть $X \in U_1$. Положим при $-\infty < x < \infty$ $N(x, X) =$ числу корней t уравнения (1), считанных сообразно кратности.

Замечание 1. Если $X \in C$, то функция $N(x, X)$ совпадает с функцией, введенной Banach'ом в [1] и так же им обозначаемой. Функцию Banach'а $N(x, X)$ И. П. Натансон называет индикатрисой Banach'а. Мы будем при любой $X \in U_1$ называть введенную в определении 2 функцию $N(x, X)$ индикатрисой Banach'а функции X.

Замечание 2. Можно было бы дать другое определение индикатрисы Banach'а для разрывных $X \in U_1$, эквивалентное определению 2, именно

Определение 2 bis. Пусть $t_1, t_2, \ldots$ суть занумерованные в последовательность точки разрыва функции X. Положим

$$\delta_k(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } t_k < t; \\ 1, \text{ если } t_k = t, \quad X(t_k-) \neq X(t_k), \quad X(t_k+) = X(t_k); \\ {}^1/_2, \text{ если } t_k = t, \quad X(t_k-) \neq X(t_k), \quad X(t_k+) \neq X(t_k); \\ 0, \text{ если } t_k = t, \quad X(t_k-) = X(t_k), \quad X(t_k+) \neq X(t_k); \\ 0, \text{ если } t_k < t. \end{cases}$$

Далее, взяв каким-нибудь образом последовательность чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ так, что $\varepsilon_k > 0$ и $\sum\limits_k \varepsilon_k < +\infty$, положим

$$\xi(t) = t + \sum_k \delta_k(t)\, \varepsilon_k, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

$$\xi(0-) = \xi(0) = 0, \qquad \xi(1+) = \xi(1).$$

Положим далее

$$X'(t') = \begin{cases} X(t) & \text{при } t' = \xi(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1; \\ X(t-) + \dfrac{t' - \xi(t-)}{\xi(t) - \xi(t-)} [X(t) - X(t-)] & \text{при } \xi(t-) \leqslant t' < \xi(t); \\ X(t) + \dfrac{t' - \xi(t)}{\xi(t+) - \xi(t)} [X(t+) - X(t)] & \text{при } \xi(t) < t' \leqslant \xi(t+). \end{cases}$$

Тогда функция $X'(t')$ непрерывна при $0 \leqslant t' \leqslant \xi(1)$, и полная вариация $X'(t')$ на интервале $0 \leqslant t' \leqslant \xi(1)$ равна $T_{t=0}^{1}(X)$. Положим $N(x, X) =$ числу различных $t' \in [0, \xi(1)]$, для которых $X'(t') = x$.

Теорема 1. *Для любой функции $X \in U_1$ функция $N(x, X)$ измерима и*

$$\int_{-\infty}^{\infty} N(x, X)\, dx = T_{t=0}^{1}(X).$$

Для того чтобы $N(x, X)$ была суммируема на $(-\infty, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы $X \in V$.

Замечание. При $X \in C$ этот результат установлен Banach'ом в [1]. Если исходить из определения 2 bis, то общий случай сейчас же сводится к этому. Однако эквивалентное определению 2bis определение 2 для некоторых других вопросов удобнее.

Определение 3 (см. ([2])). Говорим, что последовательность функций $\{X_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится по вариации к функции $X_0(t)$ и пишем $X_n - \mathrm{v} \to X_0$, если выполнены одновременно следующие три условия:

1) $X_n \in V \quad (n=0, 1, 2, \ldots)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(t) = X_0(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} T_{t=0}^{1}(X_n) = T_{t=0}^{1}(X_0)$.

Теорема 2. *Если* $X_n - \mathrm{v} \to X_0$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |N(x, X_n) - N(x, X_0)|\, dx = 0.$$

Замечание. Radó доказал ([3]), что если $X_n \in C$ $(n = 0, 1, 2, \ldots$ и $X_n - \mathrm{v} \to X_0$, то последовательность интегралов

$$\int_E N(x, X_n)\, dx$$

равностепенно абсолютно непрерывна. Так как из $X_n - \mathrm{v} \to X_0$ не следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} N(x, X_n) = N(x, X_0)$ почти везде, то теорема 2 сильнее, чем этот результат Radó. С помощью своего результата Radó доказал ([3]) теорему о сильной сходимости топологических индексов замкнутых кривых. С помощью теоремы 2 доказательство этой теоремы Radó может быть упрощено.

Теорема 3. *Пусть* $X \in U_1$ *и* $a \leqslant X(t) \leqslant b$ *при* $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Пусть $\Psi(x)$ *абсолютно непрерывна при* $a \leqslant x \leqslant b$. *Положим* (*см.* ([4]))

$$\sigma(\Psi, X) = \sum_{0 \leqslant t \leqslant 1} \{T_{\lambda=0}^{1}[\Psi\{\lambda X(t) + (1-\lambda) X(t-)\}] -$$
$$- |\Psi\{X(t)\} - \Psi\{X(t-)\}| +$$
$$+ T_{\lambda=0}^{1}[\Psi\{\lambda X(t+) + (1-\lambda) X(t)\}] - |\Psi\{X(t+)\} - \Psi\{X(t)\}|\}.$$

Тогда

$$T_{t=0}^{1}[\Psi\{X(t)\}] + \sigma(\Psi, X) = \int_a^b |\Psi'(x)|\, N(x, X)\, dx.$$

Замечание. Теорема 3 есть обобщение теоремы 1. Если X непрерывна, то $\sigma(\Psi, X) = 0$.

Поступило
5 III 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Banach, Fundamenta Math., 7, 225 (1925). [2] C. R. Adams and J. Clarkson, Bull. Am. Math. Soc., 40, 413 (1934). [3] T. Radó, Fundamenta Math., 27, 212 (1936). [4] A. P. Morse, Trans. Am. Math. Soc., 41, 48 (1937).