Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 5

МАТЕМАТИКА

Н. ЕФИМОВ

О ЖЕСТКОСТИ В МАЛОМ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 15 III 1948)

1. Известно, что плоский замкнутый желоб, даже будучи сколь угодно узким, не допускает нетривиальных бесконечно малых изгибаний второго порядка (в предположении аналитичности как самого желоба, так и полей, определяющих его деформацию, см. ([1])). Принципиальное значение этой теоремы заключается в том, что она устанавливает явление жесткости по отношению к поверхности, определенной лишь „частично в целом" (точнее: устанавливается жесткость второго порядка любой части некоторой поверхности при условии, что эта часть содержит внутри себя определенную замкнутую линию). В работах автора ([2, 3]) доказано существование поверхностей, не изгибаемых в малом.

Здесь мы хотим показать, что и явление жесткости может иметь место „в малом"; точнее, что существует поверхность, любая часть которой, содержащая внутри себя некоторую определенную точку, обладает жесткостью первого порядка (поверхность и поле, определяющее ее деформацию, предполагаются аналитическими).

Замечание. Жесткость первого порядка влечет за собой жесткость второго и высших порядков, а также невозможность непрерывных (конечных) изгибаний поверхности, аналитических относительно параметра. (Мы называем деформацию поверхности S, которая превращает эту поверхность в поверхность S_τ, аналитической относительно параметра, если уравнения деформации $x = x(u, v, \tau)$, $y = y(u, v, \tau)$, $z = z(u, v, \tau)$ аналитичны относительно τ).

Из предложений этой заметки результаты работ ([2, 3]) не следуют, так как в работах ([2, 3]) не только аналитичности, но и дифференцируемости рассматриваемых деформаций относительно параметра не требуется. В свою очередь, излагаемые здесь предложения о возможности „жесткости в малом" не могут рассматриваться как следствия теорем, изложенных в работах ([2, 3]), так как поверхность может быть неизгибаемой, не будучи при этом жесткой.

Задача установления неизгибаемости поверхности (в общей постановке) и задача установления жесткости являются различными задачами и по своему аналитическому характеру. В первой из них требуется доказать, что определенное решение некоторого (нелинейного) уравнения не может быть включено в семейство решений (за исключением семейств, которые являются в известном смысле тривиальными); во второй, что некоторое (линейное) уравнение не имеет решений (кроме тривиальных). Обычно вторая задача оказывается проще первой.

В настоящей заметке возможность „жесткости в малом“ будет доказана очень просто; нам придется использовать лишь один несложный прием, который уже употреблялся нами на заключительном этапе рассуждений, изложенных в работах ([2], [3]).

2. Пусть $z = f(x, y)$ — уравнение некоторой поверхности S ($f(x, y)$ — аналитическая функция, регулярная в точке $x = 0, y = 0$).

Рассмотрим бесконечно малую деформацию поверхности S:

$$x^* = x + \varepsilon\xi, \qquad y^* = y + \varepsilon\eta, \qquad z^* = z + \varepsilon\zeta, \tag{1}$$

где $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, $\zeta = \zeta(x, y)$ — аналитические функции, регулярные в точке $x = 0$, $y = 0$.

Если деформация (1) является бесконечно малым изгибанием, то должно иметь место приближенное равенство

$$dx^{*2} + dy^{*2} + dz^{*2} \approx dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{2}$$

верное при любых x, y, dx, dy с точностью до малых второго порядка относительно ε.

Из (2) следуют тождества:

$$\xi_x + p\zeta_x = 0, \quad \eta_y + q\zeta_y = 0, \quad \xi_y + \eta_x + p\zeta_y + q\zeta_x = 0, \tag{3}$$

где $p = z_x$, $q = z_y$.

Полагая, как это обычно делается в теории бесконечно малых изгибаний,

$$\psi = \eta_x + p\zeta_y = -\xi_y - q\zeta_x, \tag{4}$$

найдем, что вектор

$$\bar{y} = \{\zeta_y, -\zeta_x, \psi\}$$

есть вектор бесконечно малого вращения пучка линейных элементов при точке (x, y, z) деформируемой поверхности (этот пучок при деформации поверхности испытывает бесконечно малое движение). Бесконечно малое изгибание является бесконечно малым движением (всей поверхности как твердого тела), если $\bar{y} = \text{const}$.

Поверхность называется *жесткой*, если она не допускает бесконечно малых изгибаний, кроме таких тривиальных.

Из (4) и (3) легко вывести соотношения

$$\psi_x = p\zeta_{xy} - q\zeta_{xx}, \qquad \psi_y = p\zeta_{yy} - q\zeta_{xy}, \tag{5}$$

из которых видно, что $\bar{y} = \text{const}$ в том и только в том случае, когда ζ есть линейная функция ($\zeta = ax + by + c$).

Используя тождество $\psi_{xy} \equiv \psi_{yx}$, мы получим для ζ известное в данной теории уравнение

$$r\zeta_{yy} - 2s\zeta_{xy} + t\zeta_{xx} = 0, \tag{6}$$

где $r = z_{xx}$, $s = z_{xy}$, $t = z_{yy}$.

Таким образом, мы сможем указать жесткую в малом поверхность, если найдем такую функцию $z = f(x, y)$, что соответствующее ей уравнение (6) не допускает иных аналитических решений $\zeta = \zeta(x, y)$, кроме линейных.

3. Пусть $z = F^n(x, y)$ — фиксированная однородная форма степени n; положим $\zeta = \Phi^{(m)}(x, y)$, где $\Phi^{(m)}(x, y)$ — произвольная однородная форма степени m, и будем искать форму $\Phi^{(m)}(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (6).

Мы приходим к соотношению

$$F_{xx}^{(n)}\Phi_{yy}^{(m)}-2F_{xy}^{(n)}\Phi_{xy}^{(m)}+F_{yy}^{(n)}\Phi_{xx}^{(m)}=0, \tag{7}$$

которое должно быть тождеством относительно x, y. Левая часть (7) есть однородная форма $\Psi(x, y)$ степени $n+m-4$; коэффициенты L_i $(i=0, 1, \ldots, n+m-4)$ формы Ψ суть билинейные функции от коэффициентов форм $F^{(n)}$ и $\Phi^{(m)}$: $L_i=L_i(a_0, \ldots, a_n;\ b_0, \ldots, b_m)$, где $a_0, \ldots, a_n$ — коэффициенты формы $F^{(n)}$; $b_0, \ldots, b_m$ — коэффициенты формы $\Phi^{(m)}$.

Приравнивая все L_i нулю, мы получим систему линейных однородных уравнений с неизвестными $b_0, \ldots, b_m$. Обозначим через φ_m сумму квадратов миноров порядка $m+1$ матрицы этой системы. Очевидно, φ_m представляет собой целую рациональную функцию от $a_0, \ldots, a_n$. Если при данных значениях $a_0, \ldots, a_n$ имеем $\varphi_m \neq 0$, то из (7) следует $\Phi^{(m)}(x, y)\equiv 0$.

Наша цель будет достигнута, если мы сумеем найти такую форму $z=F^{(n)}(x, y)$, что соответствующие ей значения функций φ_m будут отличны от нуля при всех m, начиная с $m=2$.

В самом деле, если функция $\zeta=\Phi^{(0)}+\Phi^{(1)}+\ldots+\Phi^{(m)}+\ldots$ удовлетворяет (6), где $z=F^{(n)}(x, y)$ и $\varphi_m\neq 0$, при $m=2, 3, \ldots$, то для $m=2, 3, \ldots$ получим $\Phi^{(m)}\equiv 0$.

4. Рассмотрим форму $z=x^3y^6$; она подобрана так, что для $\Phi^{(m)}=\sum\limits_{k=0}^{m} b_k x^{m-k}y^k$ левая часть (7) имеет вид $\sum\limits_{k=0}^{m} B_k x^{n-k+1}y^{k+4}$, где $B_k=N(m, k)\,b_k=\{6k(k-1)-36k(m-k)+30(m-k)(m-k-1)\}\,bk$, т. е. B_k отличается от b_k лишь целочисленным множителем $N(m, k)$. Легко убедиться, что уравнение $N(m,k)=0$ имеет целые неотрицательные решения $k\leqslant m$, $m\geqslant 2$ только в случае $m=8$ (см. ([3])). Таким образом, для формы $z=x^3y^6$ имеем $\varphi_8=0$ и $\varphi_m\neq 0$ при всех остальных $m\geqslant 2$.

С другой стороны, форме $z=x^9+x^3y^6+y^9$ (например) соответствует $\varphi_8\neq 0$.

5. Рассмотрим теперь произвольную форму девятой степени и обозначим через E_{10} пространство ее коэффициентов $a_0, \ldots, a_9$. Из предыдущего следует, что при $n=9$ ни одна из функций φ_m $(m\geqslant 2)$ не равна тождественно нулю. Поэтому каждое уравнение $\varphi_m=0$ $(m=2, 3, \ldots)$ определяет в E_{10} гиперповерхность. Но счетное множество гиперповерхностей не может исчерпать пространство E_{10}, более того, точки этих гиперповерхностей составляют лишь множество меры нуль. Отсюда заключаем, что почти каждой форме девятой степени соответствуют $\varphi_m\neq 0$ $(m=2, 3, \ldots)$.

6. Все изложенное приводит к следующей теореме:

Почти каждая поверхность

$$z=F^{(9)}(x, y)$$

обладает тем свойством, что любая часть ее, содержащая внутри себя точку $x=0$, $y=0$, не допускает аналитических бесконечно малых изгибаний (за исключением тривиальных, т. е. бесконечно малых движений).

Эта теорема очевидным образом может быть обобщена на случай поверхности вида $z=F^{(9)}(x, y)+F^{10}(x, y)+\ldots$

Вероятно, аналогичное предложение имеет место и для поверхностей вида $z = F^{(n)}(x, y) + F^{(n+1)}(x, y) + \ldots$, если только предположить $n \geqslant 4$.

Поступило
11 III 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Rembs, Math. Z., **36** (1932). [2] Н. Ефимов, ДАН, **27**, № 4 (1940). [3] Н. Ефимов, Матем. сб., **19** (61):3, 461 (1946).