Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 5

МАТЕМАТИКА

М. В. ГИРШОВИЧ

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЯХ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 19 III 1948)

В настоящей работе доказываются следующие две теоремы:

Теорема 1. *Геометрические построения циркулем и линейкой Лобачевского в интерпретации Пуанкаре являются геометрическими построениями циркулем и линейкой Евклида.*

Теорема 2 (обратная). *Геометрические построения на плоскости Лобачевского в интерпретации Пуанкаре, выполнимые циркулем и линейкой Евклида, могут быть выполнены циркулем и линейкой Лобачевского.*

Эти теоремы дают возможность вопрос о выполнимости циркулем и линейкой Лобачевского любого геометрического построения на плоскости Лобачевского свести к вопросу о выполнимости соответствующего геометрического построения циркулем и линейкой Евклида на плоскости Евклида. Мы получаем критерий разрешимости циркулем и линейкой Лобачевского геометрических построений на плоскости Лобачевского, отличающийся от аналитического критерия Д. Д. Мордухай-Болтовского ([1]) своим геометрическим характером.

Основные моменты доказательства. Процесс геометрического построения может быть разложен на ряд отдельных операций, каждая из которых состоит в переходе от точек к линиям, осуществляемом однократным применением чертежных приборов.

Доказательство теоремы 1. Пусть имеется какое-либо геометрическое построение циркулем и линейкой Лобачевского в интерпретации Пуанкаре. Достаточно показать, что переход от точек к линиям (прямым и окружностям), осуществляемый однократным применением циркуля и линейки Лобачевского, может быть выполнен (хотя бы и неоднократным) применением циркуля и линейки Евклида.

Доказывается, что такой переход действительно может быть выполнен.

Теорему 2 разобьем на две части.

1°. Геометрические построения на плоскости Лобачевского в интерпретации Пуанкаре, выполненные циркулем и линейкой Евклида, могут быть выполнены четырьмя чертежными приборами геометрии Лобачевского: линейкой, циркулем, гиперциркулем и орициркулем.

а) Пусть имеется какое-либо геометрическое построение в интерпретации Пуанкаре, выполненное циркулем и линейкой Евклида.

Произведем преобразование подобия с центром в точке O — центре инвариантной окружности I — и с таким коэффициентом подобия k, чтобы все построение поместилось внутри инвариантной окружности I, иначе говоря, чтобы все окружности, участвующие в построении, и все точки пересечения линий, участвующих в построении, оказались внутри окружности I. При этом сама окружность I преобразуется в меньшую окружность I', относительно которой все построение будет играть ту же роль, какую играло до преобразования относительно окружности I.

б) Будем рассматривать только те геометрические построения, которые находятся внутри I. Для этих построений вместо прямых можно пользоваться хордами окружности I.

Доказывается, что переход от точек к хордам и окружностям, осуществляемый однократным применением циркуля и линейки Евклида, может быть выполнен четырьмя чертежными приборами геометрии Лобачевского.

в) Произведем над результатом построения преобразование подобия с центром в точке O — центре инвариантной окружности I — и с коэффициентом подобия $1/k$. Доказывается, что евклидово преобразование подобия с центром в точке O в том случае, если соответствующие точки находятся внутри инвариантной окружности I, может быть выполнено циркулем и линейкой Лобачевского.

Таким образом, все построение чертежными приборами геометрии Лобачевского будет слагаться из трех частей:

1. Переход от точек, заданных внутри инвариантной окружности I, к точкам, заданным надлежащим образом внутри „малой" окружности I', осуществляемый с помощью преобразования подобия с коэффициентом k.

2. Построение относительно I'.

3. Преобразование подобия с коэффициентом $1/k$, примененное к результату.

2°. Геометрические построения на плоскости Лобачевского, выполненные четырьмя чертежными приборами геометрии Лобачевского, могут быть выполнены циркулем и линейкой Лобачевского.

а) Пусть имеется геометрическое построение, в котором участвуют прямые, окружности, гиперциклы и орициклы.

Будем рассматривать это построение в интерпретации Пуанкаре. В интерпретации Пуанкаре все эти линии представляются или окружностями или частями окружностей, а также диаметрами и хордами окружности I, причем хорды представляют гиперциклы, симметричные относительно базы гиперциклам, проходящим через точку O — центр окружности I.

Предварительно избавляемся от евклидовых хорд, участвующих в построении. Для этого производим движение в смысле Лобачевского, совмещающее точку O с такой точкой внутри инвариантной окружности I, через которую не проходит ни один гиперцикл, симметричный относительно своей базы гиперциклу, участвующему в построении. Мы получим построение, выполненное только евклидовыми окружностями и диаметрами окружности I.

В дальнейшем мы будем пользоваться преобразованием подобия с центром подобия в точке O и с таким коэффициентом k_1, чтобы все евклидовы окружности, участвующие в построении, оказались внутри инвариантной окружности и могли быть рассматриваемы как окружности Лобачевского.

Показывается, как по данным прямым, окружностям, гиперциклам и орициклам найти им соответствующие линии (окружности и прямые) при преобразовании подобия с центром подобия в точке O и с коэффициентом k_1. Далее применение гиперциркуля и орициркуля в конструктивных задачах сводится к нахождению точек пересечения гиперцикла и орицикла с прямыми, окружностями, гиперциклами и орициклами. Для того чтобы найти точки пересечения, все гиперциклы и орициклы, необходимые в построении, преобразованием подобия с коэффициентом подобия k_1 переводим в окружности. Каждую из этих окружностей можно построить по трем точкам.

Затем находим точки пересечения этих окружностей с другими преобразованными линиями и, наконец, с помощью преобразования подобия с коэффициентом $1/k_1$ находим искомые точки пересечения гиперциклов и орициклов с другими линиями*.

Заметим, что в этом разделе мы доказываем другим способом две теоремы, доказанные Н. М. Несторовичем [2,3] (о возможности обойтись в построении без гиперциркуля и орициркуля).

Поступило
22 I 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Д. Мордухай-Болтовский, Сб. In memoriam Lobatschevskii, II, Казань, 1927. [2] Н. М. Несторович, ДАН, **22**, № 5 (1939). [3] Н. М. Несторович, ДАН, **43**, № 5 (1944).

* В этом месте используется указание проф. Н. П. Ефимова, значительно упрощающее доказательство.