Тепловая неустойчивость и «отрицательная теплоемкость» в локально-неравновесной среде с источником энергии

О.Н.Шабловский
Гомельский государственный технический университет, Гомель, Белоруссия
e-mail: shabl@gstu.gomel.by

Введение. Неравновесные тепловые процессы в конденсированных средах отличаются многообразием закономерностей развития пространственно-временных структур. Релаксационная модель Максвелла переноса тепла в неподвижной среде состоит из уравнения для теплового потока и уравнения баланса энергии:

$$q+\gamma\frac{\partial q}{\partial t}=-\lambda\frac{\partial T}{\partial x},\ c\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=q_{\upsilon}, \tag{1}$$

где t – время, x – декартова координата, T – температура, q – удельный тепловой поток, c – объемная теплоемкость, λ - коэффициент теплопроводности, γ - время релаксации теплового потока, q_{υ} - мощность внутренних источников энергии. Современные методы нелинейного анализа уравнений (1) изложены в [1]. В данной работе указаны два примера неклассического поведения локально-неравновесной теплофизической системы «среда – источник энергии».

Тепловая неустойчивость. Пусть процесс обладает реономными свойствами: $\lambda=\lambda_0 l(t)$, $c=c_0 h(t)$, $\gamma=\gamma(t)$, $q_{\upsilon}=(T-T_0)Q(t)$. Все эти функции аргумента t – ограниченные, непрерывно дифференцируемые и такие, что их первые производные асимптотически стремятся к нулю при $t\to\infty$; $\lambda_0, c_0, T_0 - const$. Проводя аналитические преобразования, имеющие целью разделение переменных x и t, получаем:

$$q(x,t)=\dot{p}(x)B(t),\ T-T_0\equiv\theta(x,t)=p(x)D(t),\ -\infty<x<\infty,\ t\ge 0;$$

$$D=-(B+\gamma\dot{B})/(\lambda_0 l);\ p=A\sin(x\sqrt{-\mu}+\beta);\ \beta, A-const;$$

$$\ddot{D}+n\dot{D}+\omega^2 D=0, \tag{2}$$

$$n=\gamma^{-1}+(\dot{h}/h)-Q/(c_0 h),\ \omega^2=-(Q+\gamma\dot{Q}+\lambda_0\mu l)/(c_0 h\gamma)>0,$$

где точка над символом функции означает дифференцирование по ее аргументу. Условие $\omega^2>0$ обеспечивается подходящим выбором константы $\mu<0$. Далее для краткости записи приведем результаты, полученные при $Q \equiv const$. Рассмотрим процесс, для которого при $t = 0$ функции $l(t), h(t), \gamma(t)$ резко изменяются: начинается переключение (параметрический переход) с одного режима на другой. Значит, в окрестности $t = 0$ имеем близкое к скачкообразному изменение теплофизических свойств среды. Эта ситуация ассоциируется с разрывом температурных зависимостей c, λ, γ при фазовом переходе. Например: $h = h_0 + h_1[1 - \exp(-k^2 t)]$, $h(t = 0) = h_0$, $h_\infty = h(t \to \infty) = h_0 + h_1$ и т.п. Данное тепловое поле – периодическое по координате, а его эволюция во времени определяется уравнением (2). Важно, что период колебаний $2\pi / \sqrt{-\mu}$ взаимосвязан с временными свойствами поля посредством константы μ. Отметим еще, что $q_\upsilon(T = T_0) = 0$; источник энергии может быть знакопеременным, при этом велика роль производной dq_υ / dT.

Достаточное условие устойчивости решения уравнения (2) имеет, согласно [2], вид

$$\Omega + 2n\omega^2 \geq 0,\ \Omega(t) = d\omega^2 / dt. \tag{3}$$

Основной интерес представляет случай, когда (3) выполнено при $t = 0$, а в дальнейшем, спустя конечное время $t_* > 0$, оно нарушается , наступает параметрический резонанс. Пусть $\Omega(0) \geq -2n(0)\omega^2(0) > 0$. Например, это возможно, если $n(0) < 0$ за счет $Q > 0$, $\dot{h}(0) < 0$ и, кроме того, $\dot{l}(0) > 0$, $\dot{\gamma}(0) \leq 0$. Тогда $t_* > 0$ существует, поскольку $\Omega(t \to \infty) = 0$.

Для системы «среда – источник энергии», которая закончила параметрический переход $(t \to \infty)$, оценка (3) имеет вид $(c / \gamma)_\infty \geq (dq_\upsilon / dT)_\infty$. Это условие всегда выполнено, если $dq_\upsilon / dT < 0$ либо если процесс близок к равновесному $(\gamma_\infty << 1)$. Итак, отношение $(c / \gamma)_\infty$ является верхней границей значений производной $(dq_\upsilon / dT)_\infty$, для которых при $t \to \infty$ выполнено достаточное условие устойчивости колебаний (3).

«Отрицательная теплоемкость». Явление «отрицательной теплоемкости» (ОТ) состоит в том, что подвод (отвод) тепла вызывает снижение (рост) температуры. Такое аномальное поведение температурного отклика наблюдалось экспериментально в двухкомпонентных жидкостях. Библиография этой проблемы и примеры решений задач конвенции стратифицированных двухкомпонентных жидких сред в поле силы тяжести даны в [3]. Рассмотрим некоторые аспекты ОТ с позиций теории локально-неравновесного теплопереноса.

Допустим, что q_υ и квадрат скорости распространения тепла линейно зависят от плотности энергии u: $q_\upsilon = q_\upsilon^0 + k_\upsilon u$, $\lambda / (c\gamma) \equiv w^2 = B_0 + B_1 u$;

$\gamma, q_{\upsilon}^{0}, k_{\upsilon}, B_0, B_1 - const$; $du/dT = c$. Локальное по координате x точное решение строим в конечной форме: $u = u_0(t) + xu_1(t)$, $q = q_0(t) + xq_1(t)$, $t \geq 0$. Тогда получаем

$$u_1 = u_{10}\exp(k_{\upsilon}t),\ u_{10} \equiv const,\ k_{\upsilon} < 0;\ \dot{q}_0 + (q_0/\gamma) = -u_1(B_0 + B_1u_0);$$

$$q_1 = q_{10}\exp(-t/\gamma) - \frac{B_1u_{10}^2}{(2k_{\upsilon} + \gamma^{-1})}[\exp(2k_{\upsilon}t) - \exp(-t/\gamma)],\ q_{10} \equiv const;$$

$$\dot{u}_0 = q_{\upsilon}(u_0) - q_1,\ q_{\upsilon}(u_0) = q_{\upsilon}^{0} + k_{\upsilon}u_0,\ u_0(0) = u_{00}. \tag{4}$$

Равновесное (при $t \to \infty$) значение плотности энергии такое: $u_{\infty} = u_{0\infty} = q_{\upsilon}^{0}/(-k_{\upsilon}) > 0$, $q_{\upsilon}(u_{\infty}) = 0$. Ясно, что $q_1 = \partial q/\partial x$ проявляет сильную зависимость от $|gradT|$ и от нелинейных свойств среды при $|u_{10}| >> 1$, $|B_1| >> 1$; направление вектора $gradT$ не влияет на $\partial q/\partial x$; значение константы q_{10} - существенное. Обсудим локальные свойства теплового поля в окрестности $x = 0$, применяя уравнение (4).

Пусть $q_{\upsilon}(u_{00}) > 0$, $q_{\upsilon}(u_{00}) - q_{10} < 0$; это говорит о том, что при подводе энергии, когда $dq_{\upsilon}/dt > 0$, идет убывание функции $u_0(t) = u(x = 0, t)$. Таким образом, имеем при $x = 0$ два конкурирующих процесса: взаимодействуют тепловыделение (за счет q_{υ}) и теплоотвод (за счет $\partial q/\partial x$). Пусть $q_{\upsilon}(u_{00}) < 0$, $q_{\upsilon}(u_{00}) - q_{10} > 0$, тогда $\dot{u}_0(0) > 0$, т.е. возрастает функция $u_0(t)$, и увеличивается по модулю отрицательная величина $k_{\upsilon}u_0$. Это значит, что усиливается отвод энергии источником. Следовательно, в обоих вариантах наблюдаем ОТ. Константу q_{10} естественно назвать параметром конкурента источника энергии.

В линейном случае, когда $B_1 = 0$, оказывается, что при $\gamma \to 0$, т.е. в отсутствие релаксации, исчезает влияние параметра конкурента q_{10}. Значит, в линейной среде ОТ обусловлена локальной неравновесностью, которая проявляется на фоне неоднородного по координате x теплового потока.

Перейдем к нелинейной среде, взяв $B_1 \neq 0$. Для большей выразительности примем $q_{10} = 0$. Покажем, что эффект ОТ может появиться в ходе эволюции теплового поля. В начальном состоянии имеем $\dot{u}_0(0) = q_{\upsilon}(x = 0, t = 0)$, что соответствует классической ситуации. В уравнении (4) функция $q_1(t)$ конкурирует с источником $q_{\upsilon}(x = 0, t \geq 0)$. Масштаб времени, характерный для источника энергии, равен $(-1/k_{\upsilon})$.

Отношение времени релаксации к этому масштабу равно $m = -\gamma k_\upsilon > 0$. Будем говорить, что источник «быстрый», если $m > 1$; источник «медленный», если $0 < m < 1$. Функция $q_1(t)$ имеет экстремум при $t = t^*$:

$$t^* = [\gamma /(2m-1)]\ln(2m),$$

$$q_1(t^*) = -\gamma B_1 u_{10}^2 y^* /(1-2m),\ y^* = (2m)^{\frac{2m}{1-2m}} - (2m)^{\frac{1}{1-2m}}.$$

Если $2m > 1$, то $y^* < 0$, если $0 < m < 1/2$, то $y^* > 0$. Поэтому при всех $m > 0$ получаем $y^* /(1-2m) > 0$. Знак $q_1(t^*)$ противоположен знаку параметра B_1, который несет информацию о нелинейных свойствах среды. Вид экстремума: максимум при $B_1 < 0$; минимум при $B_1 > 0$.

Пусть имеем подвод энергии, $q_\upsilon(u_0) > 0$. Конкуренция появляется, если на некотором отрезке времени будем иметь $q_1(t) > 0$ - положительную функцию, принимающую достаточно большие значения. Таким образом, эффект ОТ получим при $q_1(t^*) > 0$, т.е. при $B_1 = dw^2 / du < 0$. Точно так же при отводе тепла, $q_\upsilon(u_0) < 0$, для получения ОТ надо иметь $B_1 > 0$. В обоих случаях в окрестности $t = t^*$ возможна ситуация (при подходящем выборе u_{10}^2), когда тепло подводится, но $du_0 / dt < 0$ либо тепло отводится, но $du_0 / dt > 0$. Механизм конкуренции обусловлен нелинейностью среды (параметр B_1) и большим градиентом температуры (параметр u_{10}^2).

Если $m >> 1$, то $t^* / \gamma << 1$. Если $0 < m << 1$, то $t^* / \gamma >> 1$. Значит, чем «быстрее» источник энергии, тем скорее в ходе релаксационного процесса появится ОТ.

Заключение. Получен достаточный критерий отсутствия параметрического резонанса для реономной среды, совершающей переход из одного состояния в другое. Установлено, что эффект ОТ в локально-неравновесной системе «среда – источник энергии» появляется необходимым образом при больших градиентах температуры на фоне сильной нелинейности в уравнении состояния среды.

[1] О.Н.Шабловский, Релаксационный теплоперенос в нелинейных средах, ГГТУ имени П.О.Сухого, Гомель (2003).
[2] Н.Н.Моисеев, Асимптотические методы нелинейной механики, Наука, Москва (1969).
[3] Л.Х.Ингель, УФН **172**, 691 (2002).