Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. Г. ГУТМАН

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ БРУСА, ОГРАНИЧЕННОГО ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ СПИРАЛЯМИ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 10 III 1948)

§ 1. В ряде конструкций — в плотиностроении и краностроении встречаются кривые брусья переменной кривизны и высоты. При линейной зависимости между высотой бруса и радиусом кривизны его оси грани бруса представятся в виде логарифмических спиралей:

$$r = r_1 e^{\theta \operatorname{tg} \delta}, \qquad r = r_2 e^{\theta \operatorname{tg} \delta},$$

где r_1, r_2 — отрезки, отсекаемые гранями на полярной оси $\theta = 0$. За единицу измерения r принимаем значение $\sqrt{r_1 r_2}$.

Для решения поставленной задачи воспользуемся системой криволинейных изотермических координат α, β, связанных с цилиндрическими $\ln r, \theta$ следующим равенством в комплексной форме:

$$\alpha + i\beta = e^{i\delta} \ln z,$$

откуда в отдельности:

$$\alpha = \cos\delta \ln r - \sin\delta \cdot \theta, \qquad \beta = \sin\delta \ln r + \cos\delta \cdot \theta.$$

Цилиндрические координаты r, θ выражаются через принятые α, β:

$$r = e^{\alpha \cos\delta + \beta \sin\delta}, \qquad \theta = \beta \cos\delta - \alpha \sin\delta.$$

Координаты α, β и цилиндрические $\ln r, \theta$ имеют общий дифференциальный параметр $h = 1/r$.

Грани сектора, как линии координаты α, выражаются:

$$\alpha = \pm \alpha_0 = \pm {}^1/_2 \cos\delta \ln (r_1/r_2).$$

§ 2. Функция напряжений Эри, как общий интеграл бигармонического уравнения, представится в принятой системе координат α, β:

$$F = A_0\alpha + B_0\beta + (A_2\alpha + B_2\beta) e^{2(\alpha\cos\delta + \beta\sin\delta)} +$$
$$+ e^{\alpha\cos\delta + \beta\sin\delta}[A_1\alpha\cos(\beta\cos\delta - \alpha\sin\delta + \xi_1) +$$
$$+ B_1\beta\cos(\beta\cos\delta - \alpha\sin\delta + \eta_1)] +$$
$$+ \sum_m \sum_n A_{m,n} e^{(m+2)\alpha\cos\delta + (n+2)\beta\sin\delta} \cos(m\beta\cos\delta - n\alpha\sin\delta + \xi_{m,n}) +$$
$$+ \sum_m \sum_n B_{m,n} e^{m\alpha\cos\delta + (n+2)\beta\sin\delta} \cos[m\beta\cos\delta - (n+2)\alpha\sin\delta + \eta_{m,n}].$$

При $\delta = 0$ принятая система координат α, β вырождается в цилиндрическую, а выражение F — в известное решение плоской задачи в цилиндрических координатах.

Заменив обозначения постоянных:

$$A_{m,n} = \frac{A\left(\frac{n}{m}\right)}{a\left(\frac{n}{m}\right) a\left(\frac{n+1}{m+1}\right)}, \qquad \xi_{m,n} = \xi\left(\frac{n}{m}\right) + \mu\left(\frac{n}{m}\right) + \mu\left(\frac{n+1}{m+1}\right),$$

$$B_{m,n} = \frac{B\left(\frac{n}{m}\right)}{a\left(\frac{n+2}{m}\right) a\left(\frac{n+1}{m-1}\right)}, \qquad \eta_{m,n} = \eta\left(\frac{n}{m}\right) + \mu\left(\frac{n+2}{m}\right) + \mu\left(\frac{n+1}{m-1}\right),$$

где $\quad a\left(\frac{n}{m}\right) \sin \mu \left(\frac{n}{m}\right) = n \sin \delta \qquad a\left(\frac{n}{m}\right) \cos \mu \left(\frac{n}{m}\right) = m \cos \delta,$

напишем выражения составляющих напряжения:

$$\tau_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\left(h^2 \frac{\partial F}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(h^2 \frac{\partial F}{\partial\beta}\right)\right] =$$

$$= A_2 \sin\delta + B_2 \cos\delta + (A_0 \sin\delta + B_0 \cos\delta)\, e^{-2(\alpha\cos\delta + \beta\sin\delta)} +$$

$$+ e^{-(\alpha\cos\delta + \beta\sin\delta)}[A_1 \cos\delta \sin(\beta\cos\delta - \alpha\sin\delta + \xi_1) -$$

$$- B_1 \sin\delta \sin(\beta\cos\delta - \alpha\sin\delta + \eta_1)] +$$

$$+ \sum_m \sum_n A\left(\frac{n}{m}\right) e^{m\alpha\cos\delta + n\beta\sin\delta} \sin\left[m\beta\cos\delta - n\alpha\sin\delta + \xi\left(\frac{n}{m}\right)\right] +$$

$$+ \sum_m \sum_n B\left(\frac{n}{m}\right) e^{(m-2)\alpha\cos\delta + n\beta\sin\delta} \sin\left[m\beta\cos\delta - \right.$$

$$\left. - (n+2)\alpha\sin\delta + \eta\left(\frac{n}{m}\right)\right],$$

$$\frac{\sigma_\beta - \sigma_\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(h^2 \frac{\partial F}{\partial\alpha}\right) - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(h^2 \frac{\partial F}{\partial\beta}\right)\right] =$$

$$= A_2 \cos\delta - B_2 \sin\delta - (A_0 \cos\delta - B_0 \sin\delta)\, e^{-2(\alpha\cos\delta + \beta\sin\delta)} +$$

$$+ e^{-(\alpha\cos\delta + \beta\sin\delta)}[A_1 \sin\delta \sin(\beta\cos\delta - \alpha\sin\delta + \xi_1) +$$

$$+ B_1 \cos\delta \sin(\beta\cos\delta - \alpha\sin\delta + \eta_1)] +$$

$$+ \sum_m \sum_n A\left(\frac{n}{m}\right) e^{m\alpha\cos\delta + n\beta\sin\delta} \cos\left[m\beta\cos\delta - n\alpha\sin\delta + \xi\left(\frac{n}{m}\right)\right] +$$

$$+ \sum_m \sum_n B\left(\frac{n}{m}\right) e^{(m-2)\alpha\cos\delta + n\beta\sin\delta} \cos\left[m\beta\cos\delta - \right.$$

$$\left. - (n+2)\alpha\sin\delta + \eta\left(\frac{n}{m}\right)\right],$$

$$\frac{\sigma_\beta + \sigma_\alpha}{2} = \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial\beta^2}\right) = 2A_2(\alpha + \cos\delta) + 2B_2(\beta + \sin\delta) +$$

$$+ e^{-(\alpha\cos\delta + \beta\sin\delta)}[A_1 \cos(\beta\cos\delta - \alpha\sin\delta - \delta + \xi_1) -$$

$$-B_1 \sin(\beta \cos\delta - \alpha \sin\delta - \delta + \eta_1)] +$$

$$+ 2 \sum_m \sum_n \frac{A\left(\frac{n}{m}\right)}{a\left(\frac{n}{m}\right)} e^{(m-2)\alpha \cos\delta + n\beta \sin\delta} \cos\left[m\beta \cos\delta -\right.$$

$$\left. -(n+2)\alpha \sin\delta + \delta + \mu\left(\frac{n}{m}\right) + \xi\left(\frac{n}{m}\right)\right].$$

§ 3. Для удобства определения коэффициентов из условий на гранях отметим следующие тождества для граничных значений $\alpha = \pm\alpha_0$:

$$e^{\mp m\alpha_0 \cos\delta} \sin\left[\lambda\left(\frac{n}{m}\right) \pm n\alpha_0 \sin\delta\right] = \operatorname{tg}\rho\left(\frac{n}{m}\right) \cos\lambda\left(\frac{n}{m}\right),$$

$$e^{\mp m\alpha_0 \cos\delta} \cos\left[\lambda\left(\frac{n}{m}\right) \pm n\alpha_0 \sin\delta\right] = \operatorname{ctg}\rho\left(\frac{n}{m}\right) \sin\lambda\left(\frac{n}{m}\right) \mp b\left(\frac{n}{m}\right),$$

где

$$\operatorname{tg}\lambda\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{\operatorname{tg}(n\alpha_0 \sin\delta)}{\operatorname{th}(m\alpha_0 \cos\delta)}, \qquad \operatorname{tg}\rho\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{\sin(n\alpha_0 \sin\delta)}{\operatorname{sh}(m\alpha_0 \cos\delta)},$$

$$b\left(\frac{n}{m}\right) = \sqrt{\operatorname{sh}^2(m\alpha_0 \cos\delta) + \sin^2(n\alpha_0 \sin\delta)}.$$

Значение $\lambda(n/m)$ выделяется соответственно из постоянных $\xi(n/m)$ и $\eta(n/m)$.

В решение рассмотренных ниже частных задач входят постоянные, отвечающие значениям $n=m=2$ и $n=m=4$. Для этих значений n и m перепишем принятые обозначения:

$$\operatorname{tg}\lambda_2 = \frac{\operatorname{tg}(2\alpha_0 \sin\delta)}{\operatorname{th}(2\alpha_0 \cos\delta)}, \qquad \operatorname{tg}\lambda_4 = \frac{\operatorname{tg}(4\alpha_0 \sin\delta)}{\operatorname{th}(4\alpha_0 \cos\delta)}, \qquad \operatorname{tg}\rho = \frac{\sin(4\alpha_0 \sin\delta)}{\operatorname{sh}(4\alpha_0 \cos\delta)},$$

$$\cos 2\varphi = \frac{\cos(4\alpha_0 \sin\delta)}{\operatorname{ch}(4\alpha_0 \cos\delta)}, \qquad d = \frac{b(4/4)}{2b(2/2)} = \sqrt{\operatorname{sh}^2(2\alpha_0 \cos\delta) + \cos^2(2\alpha_0 \sin\delta)}.$$

В принятых обозначениях граничные тождества представятся:

$$e^{\mp 2\alpha_0 \cos\delta} \sin(\lambda_2 \pm 2\alpha_0 \sin\delta) = d \sin\rho,$$

$$e^{\mp 2\alpha_0 \cos\delta} \cos(\lambda_2 \pm 2\alpha_0 \sin\delta) = d(\cos\rho \mp \operatorname{tg}\varphi),$$

$$e^{\mp 4\alpha_0 \cos\delta} \sin(\lambda_4 \pm 4\alpha_0 \sin\delta) = 2d^2 \sin\rho - \sin\lambda_4,$$

$$e^{\mp 4\alpha_0 \cos\delta} \cos(\lambda_4 \pm 4\alpha_0 \sin\delta) = 2d^2(\cos\rho \mp \operatorname{tg}\varphi) - \cos\lambda_4.$$

Пользуясь выведенными зависимостями, легко, в частности, решить поставленную задачу для следующих схем внешней нагрузки.

§ 4. Момент M, сосредоточенный в полюсе. Удовлетворяя граничным условиям, выделим из выведенного общего решения члены с коэффициентами:

$$A_0 = \frac{M}{2\alpha_0 - \frac{\sin\delta}{\sin\rho}\operatorname{tg}\varphi}, \qquad A\left(\frac{-2}{0}\right) = A_0 \frac{\sin\delta}{d \sin\rho}, \qquad \xi\left(\frac{-2}{0}\right) = -\lambda_2.$$

Функция напряжений F представится:

$$F = \frac{A_0}{2}\left[2\alpha + e^{2\alpha\cos\delta} \frac{\sin(2\alpha \sin\delta - \lambda_2 - \delta)}{d \sin\rho}\right].$$

Составляющие напряжения:

$$\tau_{\alpha\beta}=A_0\frac{\sin\delta}{r^2}\left[1-e^{2\alpha\cos\delta}\,\frac{\sin(\lambda_2-2\alpha\sin\delta)}{d\sin\rho}\right],$$

$$\sigma_\alpha=\tau_{\alpha\beta}\operatorname{ctg}\delta,\qquad \sigma_\beta=-\sigma_\alpha+2A_0e^{-2\beta\sin\delta}\,\frac{\sin(2\alpha\sin\delta-\lambda_2+\delta)}{d\sin\rho}.$$

На гранях $\alpha=\pm\alpha_0$

$$\tau_{\alpha\beta}=\sigma_\alpha=0,\qquad \sigma_\beta=\frac{2A_0}{r^2}\left[\frac{\sin(\delta-\rho)}{\sin\rho}\mp\frac{\sin\delta}{\sin\rho}\operatorname{tg}\varphi\right].$$

§ 5. Сила P, приложенная в полюсе. Полярную ось направим перпендикулярно к линии действия силы P. Выделив из общего решения члены с коэффициентами:

$$A_1=\frac{P}{2\alpha_0-\dfrac{\cos\delta}{\cos\rho}\operatorname{tg}\varphi},\qquad B\binom{-1}{1}=-A\binom{-1}{1}=A_1\frac{\cos\delta}{2d\cos\rho},$$

$$\xi_1=0,\qquad \xi\binom{-1}{1}=\eta\binom{-1}{1}=-\lambda_2,$$

найдем функцию напряжений

$$F=\frac{A_1}{2}\,e^{\alpha\cos\delta+\beta\sin\delta}\Bigg[2\alpha\cos(\beta\cos\delta-\alpha\sin\delta)-$$
$$-e^{2\alpha\cos\delta}\,\frac{\cos(\beta\cos\delta+\alpha\sin\delta+\lambda_2-\delta)}{d\cos\rho}+e^{-2\alpha\cos\delta}\,\frac{\cos(\beta\cos\delta+\alpha\sin\delta+\lambda_2+\delta)}{d\cos\rho}\Bigg]$$

Составляющие напряжения:

$$\tau_{\alpha\beta}=A_1\frac{\cos\delta}{r}\Bigg[\sin(\beta\cos\delta-\alpha\sin\delta)-$$
$$-e^{2\alpha\cos\delta}\,\frac{\sin(\beta\cos\delta+\alpha\sin\delta-\lambda_2)}{2d\cos\rho}-e^{-2\alpha\cos\delta}\,\frac{\sin(\beta\cos\delta+\alpha\sin\delta+\lambda_2)}{2d\cos\rho}\Bigg],$$

$$\sigma_\alpha=A_1\frac{\cos\delta}{r}\Bigg[\cos(\beta\cos\delta-\alpha\sin\delta)-$$
$$-e^{2\alpha\cos\delta}\,\frac{\cos(\beta\cos\delta+\alpha\sin\delta-\lambda_2)}{2d\cos\rho}-e^{-2\alpha\cos\delta}\,\frac{\cos(\beta\cos\delta+\alpha\sin\delta+\lambda_2)}{2d\cos\rho}\Bigg],$$

$$\sigma_\beta=-\sigma_\alpha+2\frac{A_1}{r}\Bigg[\cos(\beta\cos\delta-\alpha\sin\delta-\delta)-$$
$$-\frac{\cos\delta}{d\cos\rho}e^{2\alpha\cos\delta}\cos(\beta\cos\delta+\alpha\sin\delta-\lambda_2)\Bigg].$$

На гранях $\alpha=\pm\alpha_0$

$$\tau_{\alpha\beta}=\sigma_\alpha=0,\qquad \sigma_\beta=2A_1\left[\frac{\sin(\delta-\rho)}{\sin\rho}\frac{\sin\theta}{r}\pm\frac{\cos\delta}{\cos\rho}\operatorname{tg}\varphi\frac{\cos\theta}{r}\right].$$

В заключение отметим, что из выведенного общего выражения функции F легко получить решение для случаев равномерного и гидростатического давления на грани бруса. Для этого остается соответственно выделить члены, отвечающие $n=m=0$ и $n=\pm1$, $m=\pm1$.

Всесоюзный научно-исследовательский
институт гидротехники им. Б. Е. Веденеева

Поступило
28 II 1948