Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 4

МАТЕМАТИКА

В. Г. ЧЕЛИДЗЕ

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТЕОРЕМЫ ФРОБЕНИУСА НА ДВОЙНЫЕ РЯДЫ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 25 II 1948)

Пусть дан двойной числовой ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{i,k}. \tag{1}$$

Обозначим $s_{m,n}=\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{i,k}$, $\sigma_{m,n}=\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} s_{i,k}$.

Двойной ряд (1) называют C_1-суммируемым к сумме s, если $\lim\limits_{m,n\to\infty}\sigma_{m,n}=s$.

Далее, двойной ряд (1) будем называть $A^{(\lambda)}$-суммируемым к сумме s, если двойной степенной ряд $f(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{i,k}x^i y^k$ абсолютно сходится при $|x|<1$, $|y|<1$ и $\lim\limits_{(x,y)\xrightarrow[\lambda]{}1} f(x,y)=s$.

Символом $(x,y)\xrightarrow[\lambda]{}1$ мы обозначаем такое стремление x и y к единице, при котором $\frac{1}{\lambda}\leqslant\frac{1-x}{1-y}\leqslant\lambda$, причем λ — данное число $\geqslant 1$.

И. И. Огиевецкий ([1]) доказал следующую теорему:

Если двойной ряд (1) C_1-*суммируем к сумме* s *и частные суммы* $s_{m,n}$ *удовлетворяют условиям:*

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{|s_{m,n}|}{m+1}\leqslant A_n,\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|s_{m,n}|}{n+1}\leqslant B_m, \tag{2}$$

то двойной ряд (1) $A^{(\lambda)}$-*суммируем к той же сумме* s.

Покажем, что формулированная выше теорема является следствием следующей доказанной нами теоремы ([2]):

Если двойной ряд (1) C_1-*суммируем к сумме* s *и выполнены равенства*

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_{m,n}}{(m+1)^2}=0 &&\text{при фиксированном } n,\\ &\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_{m,n}}{(n+1)^2}=0 &&\text{при фиксированном } m,\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

то ряд (1) $A^{(\lambda)}$-*суммируем к той же сумме* s *для любого* $\lambda\geqslant 1$.

В самом деле, допустим, что выполнены условия теоремы И. И. Огиевецкого. Так как $\lim\limits_{m,n\to\infty}\sigma_{m,n}=s$, то из равенства

$$s_{m,n}=(m+1)(n+1)\sigma_{m,n}-m(n+1)\sigma_{m-1,n}-(m+1)n\sigma_{m,n-1}+\\+mn\sigma_{m-1,n-1}$$

следует

$$\lim_{m, n \to \infty} \frac{s_{m, n}}{(m+1)(n+1)}=0.$$

На основании этого равенства и условий (2) легко показать существование такого положительного числа K, что

$$|s_{m, n}| \leqslant K(m+1)(n+1)$$

для всех m и n. Далее,

$$|\sigma_{m, n}| \leqslant \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} |s_{i, k}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K}{(m+1)(n+1)} \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} (i+1)(k+1)=\frac{K}{4}(m+2)(n+2).$$

Отсюда следует, что выполнены условия (3), а потому, в силу нашей теоремы, двойной ряд (1) $A^{(\lambda)}$-суммируем к сумме s.

Теперь покажем существование такого двойного ряда, когда условия (3) выполнены, а условия (2) И. И. Огиевецкого не выполнены. Этим будет показано, что наша теорема является более общей, чем теорема И. И. Огиевецкого. В самом деле, пусть $a_{m, n}=(n+1)^{\alpha}$, если $m=0$; $a_{m, n}=-2(n+1)^{\alpha}$, если $m=1$; $a_{m, n}=(n+1)^{(\alpha)}$, если $m=2$; $a_{m, n}=0$, если $m>2$; $n=0, 1, 2, \ldots$, где α — какое-нибудь положительное число <1. Очевидно, что

$$s_{m, n}=(-1)^{m} \sum_{k=0}^{n}(k+1)^{\alpha}, \quad \text{если} \quad m=0, 1; \qquad s_{m, n}=0, \text{ если } \quad m>1;$$

$$n=0, 1, 2, \ldots$$

Далее, так как

$$\sigma_{m, n}=\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i}(k+1)^{\alpha} \quad \text{при} \quad m=0; \qquad \sigma_{m, n}=0 \quad \text{при } m \geqslant 1;$$

$$n=0, 1, 2, \ldots,$$

то $\lim\limits_{m, n \to \infty} \sigma_{m, n}=0$. Следовательно, двойной ряд (1) является C_1-суммируемым к сумме 0.

Кроме того, легко заметить, что выполнены условия (3) нашей теоремы, а потому рассмотренный выше ряд $A^{(\lambda)}$-суммируем к сумме 0.

Теперь покажем, что для данного ряда условия (2) теоремы И. И. Огиевецкого не выполнены. В самом деле, имеем:

$$\frac{|s_{0, n}|}{n+1}=\frac{1+2^{\alpha}+\ldots+(n+1)^{\alpha}}{n+1}.$$

Отсюда ясно, что $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{|s_{0, n}|}{n+1}=+\infty$.

Следовательно, одно из условий (2) не выполнено, и поэтому на основании теоремы И. И. Огиевецкого нельзя утверждать $A^{(\lambda)}$-суммируемость рассмотренного ряда.

Математический институт
Академии Наук Грузинской ССР

Поступило
18 II 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. И. Огиевецкий, ДАН, 58, № 9 (1947). [2] В. Г. Челидзе, Сообщ. АН ГрузССР, 8, № 6 (1947).