Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 4

МАТЕМАТИКА

А. Ф. ФИЛИППОВ

ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ ЕДИНСТВЕННОСТИ И НЕЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 5 III 1948)

Большая часть существующих признаков единственности решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ основана на сравнении правой части уравнения с некоторой непрерывной функцией. Здесь дается условие единственности, основанное на сравнении с функцией $F(x,y)$, могущей быть разрывной при $x = 0$. Это дает возможность вывести ряд признаков единственности, типа признака Нагумо, которые не могут быть выведены из теоремы Монтеля [1].

Мы рассматриваем уравнение $y' = f(x,y)$ в окрестности точки $(0,0)$ при $x \geqslant 0$ (общий случай легко сводится к этому).

I. Лемма. *Пусть* $\varphi(x,y)$ *и* $\Phi(x,y)$ *непрерывны при* $0 < x \leqslant \xi$, $0 \leqslant y \leqslant \eta$, $\varphi(x,0) = \Phi(x,0) = 0$. *Если уравнение* $y' = \varphi(x,y)$ *имеет решение* $u(x)$, *удовлетворяющее условиям* $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$, $u(\xi) > 0$ *и в области* $0 < x \leqslant \xi$, $0 < y \leqslant u(x)$ $\Phi(x,y) > 0$, $\varphi(x,y) \leqslant \Phi(x,y)$, *то уравнение* $y' = \Phi(x,y)$ *тоже имеет решение* $v(x)$, *удовлетворяющее условиям*: $v(0) = 0$, $v'(0) = 0$, $v(\xi) > 0$.

Доказательство. Через точку $(\xi, u(\xi))$ проведем влево нижнюю интегральную кривую $v(x)$ уравнения $y' = \Phi(x,y)$ (в смысле Перрона). Если кривая $v(x)$ достигнет оси OX в точке с абсциссой >0, то продолжаем кривую $v(x)$ далее влево вдоль OX; в этом случае, очевидно, $v(0) = 0$, $v'(0) = 0$.

Если же при $x > 0$ $v(x) > 0$, то по теореме сравнения нижнее решение $v(x)$ уравнения $y' = \Phi(x, y)$ при $x < \xi$ проходит не выше любого решения уравнения $y' = \varphi(x, y)$, проходящего через ту же точку $(\xi, u(\xi))$, т. е. $0 \leqslant v(x) \leqslant u(x)$ при $0 < x \leqslant \xi$. Так как $u(0) = 0$ и функции u и v непрерывны, то $v(0) = 0$ и $0 \leqslant v(x) / x \leqslant u(x) / x$. $\lim\limits_{x \to 0} u(x) / x = u'(0) = 0$, значит $v'(0) = \lim\limits_{x \to 0} v(x)/x$ существует и равна 0.

II. Теорема. *Пусть* $f(x, y)$ *непрерывна при* $0 \leqslant x \leqslant a$, $|y| \leqslant b$; $F(x, y)$ *непрерывна при* $0 < x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$; $F(x, y) \geqslant 0$, $F(x, 0) = 0$.

а) *Если уравнение* $y' = F(x, y)$ *в некотором интервале* $(0,\xi)$ *не имеет решения* $v(x)$, *для которого* $v(0) = 0$ *и* $v'(0)$ *существует и равна* 0, *кроме решения* $v(x) \equiv 0$, *и если при любых* x, y *и* y_1 *в области* $0 < x \leqslant a$, $|y| \leqslant b$ *имеем* $|f(x, y) - f(x, y_1)| \leqslant F(x, |y - y_1|)$, *то уравнение* $y' = f(x, y)$ *в некотором интервале* $(0, h)$ *имеет только одно решение, проходящее через точку* $(0, 0)$.

б) *Если при любом* ξ $(0 < \xi < h)$ *уравнение* $y' = F(x, y)$ *имеет решение* $u(x)$ *(может быть для разных* ξ *различные решения), для которого* $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$, $u(\xi) > 0$, *и если в области* $0 < x \leqslant \xi$, $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_1(x) + u(x)$ *(где* $y_1(x)$ *— какое-либо решение* *уравнения $y' = f(x, y)$, проходящее через точку $(0, 0)$) имеем $f(x, y) - f(x, y_1(x)) \geqslant F(x, y - y_1(x))$, то уравнение $y' = f(x, y)$ имеет решение $y_2(x)$, проходящее через точку $(0, 0)$ и отличное от $y_1(x)$.*

Доказательство. Пусть $y_1(x)$ — какое-либо решение уравнения

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

проходящее через точку $(0, 0)$. Положим

$$g(x, z) = f(x, y_1(x) + z) - f(x, y_1(x)), \tag{2}$$

$g(x, z)$ непрерывна при $0 \leqslant x \leqslant a_1$, $|z| \leqslant b_1$, $g(x, 0) = 0$.

а) Доказательство условия единственности. Предположим, что при любом $h > 0$ существует решение $y_2(x)$ уравнения (1), проходящее через $(0, 0)$ и в некоторой точке ξ (где $0 < \xi \leqslant h$) $y_2(\xi) \neq y_1(\xi)$. Без ограничения общности можно считать $y_2(\xi) > y_1(\xi)$ (в противном случае обменяем индексы решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$). Тогда функция $u(x) = y_2(x) - y_1(x)$ будет удовлетворять уравнению $u'(x) = g(x, u(x))$, где функция $g(x, z)$ задана формулой (2). Условия леммы 1 будут выполнены, если положить $\varphi(x, y) = g(x, y)$, $\Phi(x, y) = F(x, y)$. Значит, существует решение $v(x)$ уравнения $y' = F(x, y)$, для которого $v(0) = 0$, $v'(0) = 0$, $v(\xi) > 0$. Это противоречит условию теоремы II а). Следовательно, $y_2(x) \equiv y_1(x)$.

б) Доказательство условия неединственности. Условия леммы 1 будут выполнены, если положить $\varphi(x, y) = F(x, y)$, $\Phi(x, y) = g(x, y)$. Значит, существует решение $z(x)$ уравнения $z' = g(x, z)$, для которого $z(0) = 0$, $z(\xi) > 0$. Положим $y_2(x) = y_1(x) + z(x)$.

$y_2'(x) = y_1'(x) + z'(x) = f(x, y_1(x)) + g(x, z(x)) = f(x, y_1(x) + z(x))$ на основании (2), т. е. $y_2'(x) = f(x, y_2(x))$. Значит, $y_2(x)$ — решение уравнения (1), проходящее через $(0, 0)$ и отличное от $y_1(x)$, так как $y_2(\xi) - y_1(\xi) = z(\xi) > 0$.

III. Если при $x = 0$ $F(x, y)$ непрерывна, то теорема IIа) дает условие единственности Бомпиани ([2]).

Если $F(x, y) = y / x$, то получаем признак единственности Нагумо([3]).

Рассмотрим случай $F(x, y) = \varphi(y) / \psi(x)$, где при $x > 0$ и $y > 0$ $\varphi(y) > 0$, $\psi(x) > 0$ и при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ непрерывны; $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) \geqslant 0$. Решение уравнения $y' = \varphi(y) / \psi(x)$, проходящее через точку (x_0, y_0), неявно дается уравнением

$$\int\limits_{y(x)}^{y_0} \frac{dt}{\varphi(t)} = \int\limits_{x}^{x_0} \frac{dt}{\psi(t)}. \tag{3}$$

Следовательно, через каждую точку, в которой $\varphi(y) \neq 0$, $\psi(x) \neq 0$, проходит только одно решение. Легко видеть, что если $\int\limits_0^h \frac{dt}{\varphi(t)}$ сходится, то все или некоторые решения достигают оси OX в точках с абсциссами > 0, значит, для этих решений $y'(0) = 0$. Согласно IIб), если $f(x, y) - f(x, y_1) \geqslant \varphi(y - y_1) / \psi(x)$ в указанной в пункте II б) области, то $(0, 0)$ — точка неединственности для уравнения $y' = f(x, y)$.

В частности, при $\psi(x) \equiv 1$ получаем признак неединственности Тамаркина ([4]).

Если $\int\limits_0^h \frac{dt}{\varphi(t)}$ расходится, $\int\limits^h \frac{dt}{\psi(t)}$ сходится, то, очевидно, для любого ($\neq 0$) решения имеем $y(0) > 0$. Согласно IIa), если $|f(x, y) - f(x, y_1)| \leqslant \varphi(|y - y_1|) / \psi(x)$ в некоторой окрестности точки $(0, 0)$, то $(0, 0)$ — точка единственности для уравнения $y' = f(x, y)$. В частности, при $\psi(x) \equiv 1$ получаем условие Осгуда.

IV. Если $\int_0^h \frac{dt}{\varphi(t)}$ и $\int_0^h \frac{dt}{\psi(t)}$ оба расходятся, то все интегральные кривые входят в точку $(0, 0)$. Зная, имеет ли уравнение $y' = \varphi(y) / \psi(x)$ решение, для которого $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y(x) \neq 0$, или нет, и подставляя функцию $\varphi(y) / \psi(x)$ вместо $F(x, y)$ в теорему II, можно получить достаточные условия единственности (или неединственности).

В следующих случаях уравнение $y' = \varphi(y) / \psi(x)$ не имеет решений, для которых $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y(x) \neq 0$, предполагая, что $\int_0^h \frac{dt}{\varphi(t)}$ и $\int_0^h \frac{dt}{\psi(t)}$ расходятся (доказательства приведены в п. V).

1. Если $\varphi(t) / \psi(t) \leqslant 1 - \varepsilon$.
2. Если $\varphi(t) \leqslant Mt$ и $\varphi(t) \leqslant \psi(t)$.
3. Если $\varphi(t) \leqslant Mt^n$ (где $n > 1$) и $\varphi(t) / \psi(t)$ ограничено при $t \to 0$.

Точнее:

1a. Если $\lim\limits_{x \to 0} \int_x^h \left(\frac{1}{\psi(t)} - \frac{1}{\varphi(t)} \right) dt = -\infty$.

2a. Если $\varphi(t) \leqslant Mt$ и $\lim\limits_{x \to 0} \int_x^h \left(\frac{1}{\psi(t)} - \frac{1}{\varphi(t)} \right) dt < +\infty$.

В следующих случаях существует хотя бы одно решение, для которого $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y'(x) \neq 0$.

4. Если $mt^n \leqslant \varphi(t) \leqslant Mt^n$ (где $M \geqslant m > 0$, $n > 1$) и $\varphi(t) / \psi(t) \to \infty$ при $t \to 0$.
5. Если $\varphi(t) \geqslant mt$ (где $m > 0$) и $\varphi(t) / \psi(t) \geqslant 1 + \varepsilon$.
6. Если $\varphi(t) / t \to \infty$ при $t \to 0$ и $\varphi(t) \geqslant \psi(t)$.

Точнее:

5a. Если $\varphi(t) \geqslant mt$ (где $m > 0$) и $\lim\limits_{x \to 0} \int_x^h \left(\frac{1}{\psi(t)} - \frac{1}{\varphi(t)} \right) dt = +\infty$.

6a. Если $\varphi(t) / t \to \infty$ при $t \to 0$ и $\lim\limits_{x \to 0} \int_x^h \left(\frac{1}{\psi(t)} - \frac{1}{\varphi(t)} \right) dt > -\infty$.

V. Доказательства. Легко видеть, что достаточно доказать лишь случаи 1a, 2a, 3, 4, 5a и 6a, так как случаи 1, 2, 5 и 6 содержатся в них; случаи 3, 4 и 6a здесь не доказываем.

Напишем уравнение интегральной кривой (3) в виде:

$$\int_{y(x)}^{kx} \frac{dt}{\varphi(t)} = \int_x^{x_0} \left(\frac{1}{\psi(t)} - \frac{1}{\varphi(t)} \right) dt - \int_{kx}^{x} \frac{dt}{\varphi(t)} + \int_{y_0}^{x_0} \frac{dt}{\varphi(t)}, \tag{4}$$

число k можно выбрать произвольно, $0 < k < 1$.

1a. Существует последовательность $x_1, \ x_2, \ldots \to 0$, для которой $\int\limits_{x_i}^{x_0} \left(\frac{1}{\psi(t)} - \frac{1}{\varphi(t)} \right) dt \to -\infty$. Когда $x \to 0$ по этой последовательности, правая часть равенства (4) стремится к $-\infty$ (предполагая $0 < k \leqslant 1$). Значит, при достаточно большом i имеем $\int\limits_{y(x_i)}^{kx_i} \frac{dt}{\varphi(t)} < 0, \ y(x_i) > kx_i \ y'(0) \neq 0$.

2a. Обозначим

$$\lim_{x \to 0} \int\limits_{x}^{x_0} \left(\frac{1}{\psi(t)} - \frac{1}{\varphi(t)} \right) dt = N, \quad \int\limits_{y_0}^{x_0} \frac{dt}{\varphi(t)} = A. \tag{5}$$

Существует такая последовательность $x_1, x_2, \ldots \to 0$, что

$$\int\limits_{x_i}^{x_0} \left(\frac{1}{\psi(t)} - \frac{1}{\varphi(t)} \right) dt < N + 1. \tag{6}$$

Возьмем $k = e^{-M(N+1+A)}$. Так как $\varphi(t)/t \leqslant M$, то

$$\int\limits_{kx_i}^{x_i} \frac{dt}{\varphi(t)} \geqslant \int\limits_{kx_i}^{x_i} \frac{dt}{Mt} = \frac{1}{M} \ln \frac{1}{k} = N + 1 + A. \tag{7}$$

Подставляя (5), (6) и (7) в (4), получим $\int\limits_{y(x_i)}^{kx_i} \frac{dt}{\varphi(t)} < 0, \quad y(x_i) > kx_i$, $y'(0) \neq 0$.

5a. Возьмем любое $k, 0 < k < 1$. Имеем $\frac{1}{\varphi(t)} \leqslant \frac{1}{mt}, \ \int\limits_{kx}^{x} \frac{dt}{\varphi(t)} \leqslant \frac{1}{m} \ln \frac{1}{k}$.

По условию $\lim\limits_{x \to 0} \int\limits_{x}^{x_0} \left(\frac{1}{\psi(t)} - \frac{1}{\varphi(t)} \right) dt = +\infty$. Следовательно, правая часть равенства (4) стремится к $+\infty$. Значит, при достаточно малом x $\int\limits_{y(x)}^{kx} \frac{dt}{\varphi(t)} > 0, \ y(x) < kx$. Так как k произвольно, то $y'(0) = 0$.

Поступило
17 II 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Montel, Bull. Sci. Math., **50**, 205 (1926). [2] E. Bompiani, Rendiconti Accademia Naz. Lincei, ser. 6, **1**, 298 (1925). [3] O. Perron, Math. Z., **28**, 216 (1928). [4] J. Tamarkine, Math. Z., **16**, 207 (1923).