Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 4

МАТЕМАТИКА

О. В. САРМАНОВ

О ПОРЯДКЕ РОСТА ЛИНИЙ РЕГРЕССИИ. II

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 8 III 1948)

1. В нашей предыдущей заметке ([1]) изучался порядок роста функций $\varphi(x)$ и $\psi(y)$, фигурирующих в уравнениях линий регрессии:

$$Y=\varphi(x)=\text{м. о.}_x\, y=\int_{-\infty}^{\infty} y\,\frac{F(x,y)}{p(x)}\,dy, \tag{1}$$

$$X=\psi(y)=\text{м. о.}_y\, x=\int_{-\infty}^{\infty} x\,\frac{F(x,y)}{P(y)}\,dx, \tag{1'}$$

где $F(x,y)$ — плотность распределения двух переменных, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F^2(x,y)}{p(x)\,P(y)}\,dx\,dy=k^2<\infty, \tag{2}$$

а функции $p(x)$, $P(y)$, являющиеся априорными плотностями x и y, определяются соотношениями

$$p(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)\,dy, \qquad P(y)=\int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)\,dx. \tag{3}$$

В настоящей заметке мы обобщим полученные в ([1]) результаты.

2. В ([1]) было показано, что если рассмотреть функции

$$\varphi_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} |y|\,\frac{F(x,y)}{p(x)}\,dy, \qquad \psi_1(y)=\int_{-\infty}^{\infty} |x|\,\frac{F(x,y)}{P(y)}\,dx, \tag{4}$$

$$\varphi_{2k}(y)=\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{2k-1}(x)\,\frac{F(x,y)}{P(y)}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{2k-2}(x)\,\frac{F_2(x,y)}{P(y)}\,dx, \qquad k=1,2,\ldots, \tag{5}$$

где $\varphi_0(x) = |x|$, а

$$F_2(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t,x)F(t,y)}{p(t)}\,dt, \tag{6}$$

то при соблюдении (2) имеем почти при всех y:

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_{2k}(y) = c_0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |y| P(y)\,dy, \tag{7}$$

а в симметричном случае $F(x,y) = F(y,x)$ почти при всех x:

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = c_0. \tag{8}$$

Для симметричной и несимметричной корреляции справедливы следующие теоремы, обобщающие теоремы 1, 2, приведенные в ([1]).

3. Теорема 1'. *Не существует симметричной корреляции, определяемой плотностью $F(x,y) = F(y,x)$, удовлетворяющей условию* (2) *и такой, что*

$$|\varphi(x)| = \text{м. о.}_x\, y| \geqslant \lambda(|x| - A) \text{ при } |x| \geqslant A, \tag{9}$$

где $\lambda > 1$, $A > 0$.

В самом деле, пусть выполнено (9). Понятно, что $\varphi_1(x) \geqslant 0$ и $\varphi_1(x) \geqslant |\varphi(x)|$ при всех x.

Построим выпуклую непрерывную функцию:

$$\omega(|x|) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| \leqslant A, \\ \lambda(|x| - A) & \text{при } |x| \geqslant A. \end{cases} \tag{10}$$

Очевидно, что при всех x

$$\varphi_1(x) \geqslant \omega(x). \tag{11}$$

Пользуясь неравенством Ляпунова — Гельдера, примененным к выпуклой функции $\omega(|x|)$, получим:

$$\varphi_2(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(y) \frac{F(x,y)}{p(x)}\,dy \geqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(|y|) \frac{F(x,y)}{p(x)}\,dy \geqslant \omega\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |y| \frac{F(x,y)}{p(x)}\,dy\right\} =$$
$$= \omega\{\varphi_1(x)\} \geqslant \omega\{\omega(x)\} = \omega^{(2)}(x),$$

и вообще

$$\varphi_k(x) \geqslant \omega^{(k)}(x) \text{ при всех } x, \tag{11'}$$

где

$$\omega^{(k)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| \leqslant \dfrac{A\lambda}{\lambda - 1}\left(1 - \dfrac{1}{\lambda^k}\right) = C, \\ \lambda^k(|x| - C) & \text{при } |x| \geqslant C. \end{cases} \tag{12}$$

Из (11') и (12) следует, что при $|x| \geqslant \frac{A\lambda}{\lambda-1}$ $\varphi_k(x) \to \infty$ при $k \to \infty$, что противоречит (8).

4. Теорема 2'. *Не существует несимметричной корреляции удовлетворяющей ограничению* (2) *и такой, что*

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &\geqslant \tau(|x|) \qquad \textit{при } |x| \geqslant A > 0, \\ |\psi(y)| &\geqslant \tau^{-1}[(1+\mu)|y|] \quad \textit{при } |y| \geqslant B > 0,\ \mu > 0, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\tau(|x|)$ — *монотонно возрастающая, непрерывная, выпуклая функция* $|x|$ *такая, что* $\tau(0)=0$, *а* $\tau^{-1}(|y|)$ — *обратная ей функция.*

В самом деле, предположим, что (13) выполнено, и построим две новые функции:

$$\omega(|x|) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| \leqslant A, \\ \tau(|x|) - \tau(A) & \text{при } |x| \geqslant A; \end{cases} \tag{14}$$

$$\bar{\omega}(|y|) = \begin{cases} 0 & \text{при } |y| \leqslant B, \\ \tau^{-1}[(1+\mu)(|y| - B)] & \text{при } |y| \geqslant B; \end{cases} \tag{15}$$

$\omega(|x|)$, $\bar{\omega}(|y|)$ непрерывны, первая из них выпукла. Из (1), (1'), (4), (14), (15) следует, что

$$\varphi_1(x) \geqslant \omega(x), \qquad \psi_1(y) \geqslant \bar{\omega}(|y|) \tag{16}$$

при всех x и y.

Найдем оценку снизу для $\varphi_2(y)$:

$$\varphi_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x) \frac{F(x,y)}{P(y)}\, dx \geqslant \int_{-\infty}^{\infty} \omega(|x|) \frac{F(x,y)}{P(y)}\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \omega\left\{\int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{F(x,y)}{P(y)}\, dx\right\} = \omega\{\psi_1(y)\} \geqslant \omega\{\bar{\omega}(|y|)\} = \omega^{(2)}(y),$$

где

$$\omega_2(|y|) = \begin{cases} 0 & \text{при } |y| \leqslant C = B + \frac{\tau(A)}{1+\mu}, \\ (1+\mu)(|y| - C) & \text{при } |y| \geqslant C. \end{cases}$$

Но $\varphi_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{F_2(x,y)}{P(y)}\, dx$ в силу (5), где ядро $F_2(x,y)$ согласно (6) симметрично. Мы таким образом пришли к рассмотренному выше случаю.

Можно и непосредственно показать, что при $|y| \geqslant \frac{(1+\mu)C}{\mu}$ $\varphi_{2k}(y) \to \infty$, что противоречит (7).

Легко видеть, что теоремы 1, 2, приведенные в ([1]), действительно частные случаи теорем 1', 2'.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
7 III 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. В. Сарманов, ДАН, 59, № 6 (1948).