Докла ы Академии Наук СССР
48. Том LX, №

МАТЕМАТИКА

Е. А. АНФЕРТЬЕВА

О ФОРМУЛАХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВИНОГРАДОВА — КОРПУТА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 5 III 1948)

В работах акад. И. М. Виноградова [1] и van der Corput'a [2], касающихся метода оценок сумм

$$S=\sum_{x=Q}^{Q+P}{}' e^{2\pi i F(x)},$$

мы находим формулы преобразования подобных сумм.

Хорошо известен целый ряд функций, допускающих точные формулы преобразования, как, например, преобразование дзета-функции, переводящее $\zeta(s)$ в $\zeta(1-s)$, а также аналогичные формулы преобразования для тета-функции.

Результаты акад. И. М. Виноградова и van der Corput'a чрезвычайно интересны в том отношении, что они для целого ряда функций устанавливают приближенные формулы преобразования.

В предлагаемой работе автор получает для специального класса функций приближенные формулы преобразования типа Виноградова — Корпута, причем метод, применяемый автором к рассматриваемым суммам, содержащим сглаживающий коэффициент, дает улучшенную оценку остаточного члена.

Автор приводит доказательство для функции

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^m}{N}} e^{-2\pi i\alpha n^m}, \tag{1}$$

$m\geqslant 2$ целое, $x=\left(\frac{1}{N}+2\pi i\alpha\right)^{\frac{1}{m}}$.

Рассуждения автора состоят в следующем.

С помощью преобразования Меллина для ряда (1) легко может быть получено следующее интегральное представление

$$S(x)=\frac{1}{2\pi m i}\int_{2-\infty i}^{2+\infty i} x^{-s}\Gamma\left(\frac{s}{m}\right)\zeta(s)\,ds, \tag{2}$$

или, если по теореме Коши передвинуть прямую интегрирования,

$$S(x)=\frac{1}{2\pi m}\,\mathrm{V.\,p.}\int_{-\infty}^{\infty}x^{-it}\Gamma\left(\frac{it}{m}\right)\zeta(it)\,dt+O(1), \tag{3}$$

где V. p. обозначает, что для интеграла берется главное значение в смысле Коши.

Принимая во внимание функциональное уравнение для дзета-функции

$$\zeta(s)=-\frac{(2\pi)^s}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(1-s)\,\zeta(1-s)$$

и хорошо известные равенства для синуса и гамма-функции ([3])

$$\Gamma(1-it)=A_1e^{-it\ln|t|}|t|^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\left(1+\frac{B}{t}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{it}{m}\right)=A_2e^{\frac{it}{m}\ln\frac{|t|}{m}}\left|\frac{t}{m}\right|^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\left(1+\frac{B}{t}\right),$$

$$\sin\frac{\pi it}{2}=A_3e^{\frac{\pi}{2}|t|}\left(1+\frac{B}{t}\right),\quad B\ll 1,$$

после несложных преобразований получим соотношение

$$S(x)=A_4\int_{-\infty}^{\infty}r_1^{-it}e^{\psi t}\,\Gamma\left[\left(1-\frac{1}{m}\right)\left\{\frac{m}{2(m-1)}-it\right\}\right]\zeta(1-it)\,dt+R, \tag{4}$$

где $r_1=\left|\frac{x}{4\pi^2}\right|e^{\frac{\ln m}{m}}$, $\psi=\frac{\pi}{2}\left(2-\frac{1}{m}\right)-\frac{\eta}{m}$, $\eta=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2\pi\alpha N}$.

Для оценки остаточного члена R заметим, что $\zeta(1-it)\ll\ln|t|$, тогда

$$R\ll\int_{1}^{\infty}e^{-\frac{\eta}{m}t}\,\frac{\ln t}{t}\,dt\ll\ln^2|\alpha|N. \tag{5}$$

Используя представление дзета-функции в виде ряда и снова применяя формулу Меллина, из (4), принимая во внимание (5), получим

$$S(x)=A_4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2(m-1)}}}\,e^{-\left(\frac{n}{r_1}e^{-i\psi}\right)^{\frac{m}{m-1}}}+O(\ln^2|\alpha|N). \tag{6}$$

Поскольку $\eta=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2\pi\alpha N}$, то

$$e^{i\frac{m}{m-1}\psi}\sim\frac{\frac{1}{2\pi N\alpha(m-1)}-i}{\sqrt{1+\frac{1}{4\pi^2N^2\alpha^2(m-1)^2}}},\quad r_1\sim|\alpha|^{\frac{1}{m}},$$

если $2\pi|\alpha|N>1$.

Тогда формула (6) может быть преобразована и, принимая во внимание выражение (1) для ряда $S(x)$, можно написать окончательный результат:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^m}{N}} e^{-2\pi i\alpha n^m} =$$

$$= A_0 |\alpha|^{-\frac{1}{2(m-1)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2(m-1)}}} e^{-\frac{n^{\frac{m}{m-1}}}{|\alpha|^{\frac{1}{m-1}} 2\pi N\alpha (m-1)}} e^{i\frac{n^{\frac{m}{m-1}}}{|\alpha|^{\frac{1}{m-1}}}} +$$

$$+ O(\ln^2 |\alpha| N), \tag{I}$$

$m \geqslant 2$ целое, $2\pi |\alpha| N > 1$, A_0 — постоянная.

Эта формула, как мы видим, дает преобразование одной суммы в другую с весьма большой степенью точности.

Если при доказательстве вместо $\zeta(s)$ использовать квадрат дзета-функции

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s},$$

то получается аналогичная формула преобразования с той же оценкой остаточного члена:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\, e^{\frac{n^m}{N}} e^{-2\pi i\alpha n^m} =$$

$$= A |\alpha|^{-\frac{1}{2m-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\,2m-1)}}} e^{-\frac{n^{\frac{m}{2m-1}}}{|\alpha|^{\frac{1}{2m-1}} 2\pi N\alpha (2m-1)}} e^{-i\frac{n^{\frac{m}{2m-1}}}{|\alpha|^{\frac{1}{2m-1}}}} +$$

$$+ O(\ln^2 |\alpha| N). \tag{II}$$

Последняя формула будет иметь место и при $m=1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{-\frac{n}{N}} e^{-2\pi i\alpha n} =$$

$$= A |\alpha|^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{-\frac{n}{N\alpha^2 2\pi}} e^{\frac{n}{|\alpha|} i} + O(\ln^2 |\alpha| N). \tag{III}$$

Наконец, если рассматривать произведение двух дзета-функций другие свойства этого произведения исследованы автором ранее ([4]):

$$\varphi_\nu(s) = \zeta(s+\nu)\zeta(s-\nu), \qquad -\frac{1}{2} < \nu < \frac{1}{2}, \qquad \nu \neq 0, \tag{7}$$

то получается формула, подобная формуле (II), с той лишь разницей, что вместо коэффициентов $\tau(n)$ (число делителей n) войдут арифметические функции

$$a_\gamma(n)=\frac{\sum\limits_{d\delta=n} d^{2\gamma}}{n^\gamma}.$$

В заключение считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность акад. И. М. Виноградову и проф. Ю. В. Линнику за просмотр рукописи и ценные указания.

Поступило
4 III 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Виноградов, Тр. Матем. ин-та им. Стеклова, **9**, 17 (1935); И. М. Виноградов, Изв. ЛПИ, **30** (1927). [2] J. G. van der Corput, Math. Ann., **87**, H. 1—3 (1922); **89**, 216 (1922). [3] Е. Т. Уитеккер и Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа, ч. II, 1934. [4] Е. А. Анфертьева, ДАН, **30**, № 5 (1941).