Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 3

ФИЗИКА

Г. Д. МАЛЮЖИНЕЦ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ФОРМУЛЫ ВЕЙЛЯ ДЛЯ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ НАД ПОГЛОЩАЮЩЕЙ ПЛОСКОСТЬЮ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 4 III 1948)

В работе рассматривается скалярное волновое поле $u(x, y, z)$ над поглощающей плоскостью $z=0$, создаваемое источниками, как-то распределенными в полупространстве $z>0$.

С самого начала мы представим искомое решение в виде суммы $u=u_1+u_2$ падающей и отраженной волн. При этом задача состоит в том, чтобы по заданной падающей в полупространстве $z>0$ волне $u_1(x, y, z)$ произвольной формы, но зависящей от времени соответственно множителю $e^{-i\omega t}$, найти волну $u_2(x, y, z)$, отраженную от плоскости $z=0$, где выполняется краевое условие

$$z=0, \quad \frac{\partial}{\partial z}(u_1+u_2)+ikg(u_1+u_2)=0. \tag{1}$$

Это условие является частным случаем приближенных краевых условий, введенных в электродинамику М. А. Леонтовичем и применявшихся затем в ряде работ ([1]). Не останавливаясь на обосновании ([2]), отметим лишь, что условие (1) справедливо в тех случаях, когда можно пренебречь передачей колебаний из окрестности одной точки границы $z=0$ в окрестность другой точки непосредственно через нижнюю среду (вследствие сильного затухания волн в нижней среде или вследствие специальной анизотропии ее структуры). В случае электродинамической задачи u можно рассматривать как вертикальную компоненту вектора Герца, в то время как $g=\sqrt{\mu/\varepsilon}$ есть безразмерная комплексная постоянная, характеризующая поглощающую среду в области $z<0$. В акустике условие типа (1) применялось со времен Релея, правда, до последнего времени ([3]) без теоретической оценки границ применимости. В акустическом случае u можно считать звуковым давлением, причем $g=(\rho c)/Z$, где ρc — волновое сопротивление верхней среды; Z — нормальный импеданц, определяемый для некоторой точки поглощающей поверхности как отношение звукового давления к нормальной компоненте скорости, направленной внутрь поглощающей среды. Для любых реальных поверхностей вещественная часть g неотрицательна, мнимая часть g может иметь любой знак. В качестве падающей волны $u_1(x, y, z)$ возьмем произвольную функцию, представимую в виде

$$u_1(x, y, z)=-\frac{1}{4\pi}\iiint f(\xi, \eta, \zeta)\frac{e^{ikR}}{R}d\xi\, d\eta\, d\zeta, \tag{2}$$

где $R=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$, и, следовательно, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta u+k^2u=f(x, y, z), \tag{3}$$

причем будем считать, что

$$\text{при } z<\varepsilon\ (>0) \qquad f(x, y, z)=0, \tag{4}$$

так что в этой области для u_1 справедливо

$$\Delta u+k^2u=0. \tag{5}$$

Поскольку решение волнового уравнения является также функцией вещественного волнового числа k, мы можем вместо $u(x, y, z)$ писать $u(x, y, z, k)$.

Заметим, что в области $z<0$ падающая волна u_1 вида (2) при условии (4) обладает свойством (погашаемости)

$$\lim_{\alpha\to\infty} u(x, y, z, k+i\alpha)=0. \tag{6}$$

Теперь будем искать функцию $u_2(x, y, z)$, удовлетворяющую (5) и (6)* при $z>0$ и вместе с $u_1(x, y, z)$ краевому условию (1). Назовем $u_2(x, y, z)$ отраженной волной.

Рассмотрим сперва решение $v=v_1+v_2$ в частном случае $|g|\to\infty$. При этом краевое условие (1) переходит в

$$z=0, \qquad v_1+v_2=0. \tag{7}$$

Если падающая волна $v_1(x, y, z)$ удовлетворяет (5) и (6) при $z<0$, то для отраженной волны $v_2(x, y, z)$, удовлетворяющей (5) и (6) при $z>0$ и совместно с v_1 условию (7), мы получим простое решение $v_2(x, y, z)=Nv_1(x, y, z)$, где N означает операцию отражения в „идеально мягкой“ плоскости $z=0$:

$$Nv(x, y, z)=-v(x, y, -z). \tag{8}$$

Заметим, что операция N переносит свойства функции удовлетворять (5) и (6) из области $z<0$ в область $z>0$.

Чтобы свести общий случай конечного g к этому частному, введем в рассмотрение оператор M, преобразующий функцию $u(x, y, z)$ в некую функцию $v(x, y, z)$ и определяемый равенством

$$v=Mu\equiv\frac{\partial u}{\partial z}+ikgu\equiv e^{-ikgz}\frac{\partial}{\partial z}(e^{ikgz}u). \tag{9}$$

Оператор M коммутирует с оператором $L=\Delta+k^2$. Таким же свойством обладает обратный оператор $u=M^{-1}v\equiv\int\limits_c^z e^{ikg(\zeta-z)}v(x, y, \zeta)\,d\zeta$, пригодный для функций v, получаемых посредством (9) из таких функций u, что можно подобрать не зависящую от x, y величину c такую, чтобы удовлетворить условию $\lim\limits_{z\to c} e^{ikgz}u(x, y, z)=0$.

Для интересующей нас задачи отражения волн типа (2) можно положить $c=i\infty$. Тогда обратный оператор получает вид

$$u(x, y, z)=M^{-1}v(x,y,z)\equiv\int\limits_{i\infty}^{z} e^{ikg(\zeta-z)}v(x, y, \zeta)\,d\zeta \tag{10}$$

при вещественном положительном k и при неотрицательной $\mathrm{Re}(g)$.

---

* Условие (6) здесь заменяет принцип излучения.

Чтобы выражение (10) годилось и при замене параметра k на $k+i\alpha$, достаточно взять нижний предел так, что $|c|\to\infty$ и $\arg c=\pi/2-\operatorname{arc\,tg}(\alpha/k)$. При этом можно показать, что если функция $\varphi(x, y, z, k)$ удовлетворяет в некоторой области условию погашаемости (6), то ему удовлетворяют в той же области также функции $M\varphi$ и $M^{-1}\varphi$.

Для нашей цели удобство операторов M и M^{-1} состоит в том, что, оставляя инвариантными свойства функций удовлетворять волновому уравнению (лишь изменяя правую часть, если она не равна нулю) и условию (6), они дают связь между решениями краевых задач при $z=0$, $\partial u/\partial z+ikgu=0$ и $v=0$*. Благодаря этому задача отражения от поглощающей плоскости сводится к упомянутому частному случаю. Пользуясь свойствами операторов N, M и M^{-1}, мы можем сразу написать в операторной форме выражение для отраженной волны, удовлетворяющей всем поставленным требованиям, если задана падающая волна $u_1(x, y, z)$:

$$u_2(x, y, z)=M^{-1}NM\ u_1(x, y, z). \tag{11}$$

Раскрывая это выражение на основании (9), (8) и (10), получаем

$$\begin{aligned} u_2(x, y, z)&=\int\limits_{i\infty}^{z} e^{ikg(\zeta-z)}e^{ikg\zeta}\frac{\partial}{\partial\zeta}[e^{-ikg\zeta}u_1(x, y, -\zeta)]\,d\zeta= \\ &=u_1(x, y, -z)-2ikg\,e^{-ikgz}\int\limits_{i\infty}^{z} e^{ikg\zeta}u_1(x, y, -\zeta)\,d\zeta, \end{aligned} \tag{12}$$

так что результирующее поле $u=u_1+u_2$ принимает вид

$$u(x, y, z)=u_1(x, y, z)+u_1(x, y, -z)-2ikg\,e^{-ikgz}\int\limits_{i\infty}^{z} e^{ikg\zeta}u_1(x, y, -\zeta)\,d\zeta. \tag{13}$$

Эта формула представляет собой обобщение известной в теории распространения радиоволн формулы Вейля. Последняя получается как частный случай, если принять в качестве u_1 сферическую волну $u_1=\frac{e^{ikR_1}}{R_1}$ $\left(R_1=\sqrt{r^2+(z-h)^2}\right)$ создаваемую простым источником, расположенным в точке $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}=0$, $z=h$. Обозначая в этом случае результирующее поле через $G(r, z)$, имеем:

$$G(r, z)=\frac{e^{ikR_1}}{R_1}+\frac{e^{ikR_2}}{R_2}-2ikg\int\limits_{i\infty}^{z}\frac{e^{ik[R_2+g(\zeta-z)]}}{R_2}\,d\zeta, \tag{14}$$

где $R_2=\sqrt{r^2+(z+h)^2}$ — расстояние до „отраженного" источника. Это формула Вейля, которая обычно ([4]) записывается в виде**

$$G(r, z)=\frac{e^{ikR_1}}{R_1}\ \frac{e^{ikR_2}}{R_2}+2ikge^{-ikgz}\int\limits_{t_0}^{i\infty} e^{\frac{1}{2}ikr\sqrt{1-g^2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\frac{dt}{t}, \tag{15}$$

* Чтобы оператор M был дифференциальным, необходимо, чтобы ядро обратного оператора M^{-1} разбивалось на два множителя с разделенными переменными z и ζ. Для неплоских задач это едва ли возможно, за исключением тривиальных случаев. Например, сферическая волновая задача с краевым условием $du/\partial R+ikgu=0$ при $R=R_0$ может быть преобразована в задачу с краевым условием $u=0$ посредством оператора $Mu\equiv\frac{\partial u}{\partial R}+\left(ikg+\frac{1}{R}-\frac{1}{R_0}\right)u$ лишь для функций, зависящих только от радиуса R.

** С тем отличием, что обычно в формуле Вейля верхний предел интеграции принимается вещественным, что допустимо лишь при определенном знаке $\operatorname{Im}(g)$. Формулы же (15) и (14) пригодны для любых конечных значений $\operatorname{Im}(g)$.

получаемом из (14) путем замены переменной интеграции

$$t=\sqrt{\frac{1+g}{1-g}}\ \frac{R_2+(h+\zeta)}{r};\qquad t_0=t\,(\zeta=z).$$

Таким образом, мы видим, что формула Вейля, выведенная в свое время как приближение в задаче о распространении волн вдоль границы раздела двух однородных сред, является строгим решением волновой задачи с краевым условием (1). Точнее говоря, решение, даваемое формулой Вейля, является (отвлекаясь от числового множителя) функцией Грина для этого случая. Следовательно, обозначая решение (14) через $G(x, y, z, \xi, \eta, h)$, можно написать решение неоднородного уравнения (3), эквивалентное (13), в виде

$$u(x, y, z)=-\frac{1}{4\pi}\iiint G(x, y, z, \xi, \eta, h)\,f(\xi, \eta, h)\,d\xi\,d\eta\,dh.$$

Формулу (14) можно также представить в виде (рис. 1)

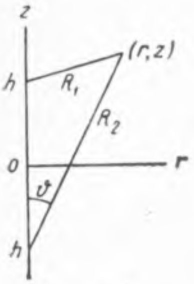

Рис. 1

$$G=\frac{e^{ikR_1}}{R_1}+\frac{e^{ikR_2}}{R_2}-2ikg\,e^{-ikgR_2\cos\vartheta}J, \tag{14*}$$

$$J=\int\limits_{-\infty}^{ikR_2(1+g\cos\vartheta)}\frac{e^{\nu}}{\sqrt{\nu^2-(1-g)(ikR_2\sin\vartheta)^2}}\,d\nu. \tag{16}$$

В двух случаях, при $g=1$ и при $\vartheta=0$, J обращается в интегралэкспоненциальную функцию $J=\mathrm{Ei}\,[ikR_2(1+g\cos\vartheta)]$.

Для общего случая, нитегрируя (16) по частям, получаем асимптотическое разложение

$$ikR_2(g+\cos\vartheta)\,e^{-ikR_2(1+g\cos\vartheta)}J=1+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(q)\left[\frac{1+g\cos\vartheta}{ikR_2(g+\cos\vartheta)^2}\right]^n, \tag{17}$$

где $q=\dfrac{g+\cos\vartheta}{1+g\cos\vartheta}$, $A_n(q)=(2n-1)!!+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{m=1}^{E(n/2)}(-1)^m(n-m)(n-m+1)\times$ $\times[2(n-m)-1]!!\,q^{2m}$; $E\left(\dfrac{n}{2}\right)$ — целая часть $\dfrac{n}{2}$; $(2n-1)!!=$ $=1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)$; $A_1(q)=1$, $A_2(q)=3\cdot1-q^2$ и т. д., $A_n(1)=n!$

При $kR_2\,|(g+\cos\vartheta)^2/(1+g\cos\vartheta)|\gg1$ приближенно получаем из (14*) и (17):

$$G=\frac{e^{ikR_1}}{R_1}+\frac{e^{ikR_2}}{R_2}\left[\frac{\cos\vartheta-g}{\cos\vartheta+g}-\frac{2g}{ikR_2}\,\frac{1+g\cos\vartheta}{(g+\cos\vartheta)^3}-\ldots\right].$$

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии Наук СССР

Поступило
31 I 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Л. Альперт, ЖТФ, **10**, в. 10, 1358 (1940); А. Н. Щукин, Распространение радиоволн, 1940; G. Grünberg, J. of Physics USSR, **6**, 185 (1942); М. А. Леонтович, Изв. АН СССР, сер. физ., **8**, 16 (1944); M. Leontovich and V. Fock, J. of Physics USSR, **10**, 13 (1946); **10**, 130 (1946). [2] М. А. Леонтович, Статья в сб. Новейшие исследования распространения радиоволн, **2**, изд. АН СССР, 1948. [3] Л. М. Бреховских, Усп. физ, наук, **32**, в. 4, 474 (1947). [4] Франк и Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, гл. XXIII, § 1 (переработан. В. А. Фоком), 1937.