Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Р. Г. МИРИМАНОВ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ОТ ПАРАБОЛОИДА ВРАЩЕНИЯ НЕОГРАНИЧЕННЫХ РАЗМЕРОВ

(Представлено академиком Б. А. Введенским 17 II 1948)

С точки зрения прикладной электродинамики следует считать, что наиболее важным типом сферической волны является волна, возбуждаемая электрическим или магнитным диполем.

Рассмотрим случай, когда поле возбуждается электрическим диполем, помещенным в фокусе параболоида вращения неограниченных размеров, причем ось диполя перпендикулярна оси параболоида.

Компоненты поля диполя в этом случае, выраженные в сферических координатах, имеют вид:

$$
\begin{gathered}
E_r = \frac{iI}{\pi} \sin\vartheta \cos\varphi \left[\frac{i}{kr} + \frac{1}{(kr)^2}\right] \theta, \\
E_\vartheta = \frac{iI}{2\pi} \sqrt{1 - \sin^2\vartheta \cos^2\varphi} \left[-1 + \frac{i}{kr} + \frac{1}{(kr)^2}\right] \theta, \\
E_\varphi = 0, \qquad H_r = 0, \qquad H_\vartheta = 0, \\
H_\varphi = \frac{I}{2\pi} \sqrt{1 - \sin^2\vartheta \cos^2\varphi} \left[i + \frac{1}{kr}\right] \theta,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где I — ток в диполе, r — расстояние от точки наблюдения до центра диполя, k — волновое число,

$$
\begin{aligned}
\theta = \frac{e^{ikr}}{r} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\infty} \Big\{ & S_\nu^\mu(-2ik\eta) V_\nu^\mu(2ik\xi) A(\nu, 0) + \\
& + 2 \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s S_\nu^\mu(-2ik\eta) V_\nu^\mu(2ik\xi) A(\nu, s) + \\
& + \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s S_\nu^\mu(-2ik\eta) V_\nu^\mu(2ik\xi) A(\nu, 2s+1) \Big\} \frac{\Gamma(\mu+1)^2 \Gamma(\nu) \nu \sin \pi\mu e^{i\pi\mu}}{i\Gamma(\mu+\nu+1)^2 (2ik)^\mu}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Выражение (2) представляет собой разложение падающей скалярной сферической волны, исходящей из начала координат, соответственно частному решению волнового уравнения, получаемому из выражения (4) статьи ([1]).

Вспомогательные потенциалы Φ и Ψ, определенные по полю (1), имеют вид:

$$\Phi = \frac{A}{r} \sin(kr + \alpha), \tag{3}$$

$$\Psi = \frac{1}{r} [c_1 \sin kr + c_2 \cos kr], \tag{4}$$

где

$$c_1 = \int \frac{\frac{iI}{\pi} \sin\vartheta \cos\varphi \left[\frac{i}{kr} + \frac{1}{(kr)^2}\right] \theta}{\sin kr \left(\ln \frac{\cos kr}{\sin kr}\right)'} dr, \tag{5}$$

$$c_2 = \int \frac{\frac{iI}{\pi} \sin\vartheta \cos\varphi \left[\frac{i}{kr} + \frac{1}{(kr)^2}\right] \theta}{\cos kr \left(\ln \frac{\cos kr}{\sin kr}\right)'} dr, \tag{6}$$

A и α — постоянные, определяемые начальными условиями.

Учитывая зависимость поля и потенциалов от угла φ, разложение для потенциалов полного поля можно написать в виде:

$$\Phi = \sum_{s=1}^{\infty} \Phi^{(s)}(\xi, \eta) \sin\varphi s, \tag{7}$$

$$\Psi = \frac{1}{2} \Psi^{(0)}(\xi, \eta) + \sum_{s=1}^{\infty} \Psi^{(s)}(\xi, \eta) \cos\varphi s, \tag{8}$$

где

$$\Phi^{(s)}(\xi, \eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\infty} S_\nu^\mu(-2ik\eta) V_\nu^\mu(2ik\xi) M_s^n(\mu, \nu) +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\infty} V_\nu^\mu(-2ik\xi) V_\nu^\mu(2ik\eta) M_s^0(\mu, \nu), \tag{9}$$

$$\Psi^{(s)}(\xi, \eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\infty} S_\nu^\mu(-2ik\eta) V_\nu^\mu(2ik\xi) K_s^n(\mu, \nu) +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\infty} V_\nu^\mu(-2ik\xi) V_\nu^\mu(2ik\eta) K_s^0(\mu, \nu). \tag{10}$$

Отметим, что асимптотическое представление произведения

$$V_\nu^\mu(-2ik\xi) V_\nu^\mu(2ik\eta),$$

в котором

$$V_\nu^\mu(-2ik\xi)\simeq\frac{1}{\pi}\Gamma(\mu+\nu+1)e^{-\frac{1}{2}\pi i\left(-\frac{1}{2}\mu+\nu\right)}(2k\xi)^{-\frac{1}{2}\mu-\nu-1}e^{-\frac{1}{2}ik2\xi},$$

удовлетворяет требованиям принципа излучения.

В формулах (9) и (10) коэффициенты $M_s^n(\mu,\nu)$ и $K_s^n(\mu,\nu)$ соответствуют известной падающей волне.

Коэффициенты $M_s^0(\mu,\nu)$ и $K_s^0(\mu,\nu)$ соответствуют отраженной волне и должны быть определены из условий на поверхности параболоида.

Для отраженной волны

$$\Phi^{(s)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\nu}^{\infty}V_\nu^\mu(-2ik\xi)V_\nu^\mu(2ik\eta)M_s^0(\mu,\nu), \tag{11}$$

$$\Psi^{(s)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\nu}^{\infty}V_\nu^\mu(-2ik\xi)V_\nu^\mu(2ik\eta)K_s^0(\mu,\nu), \tag{12}$$

$$\xi E_\xi^{(s)}=-ik\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\nu}^{\infty}\Big[(\nu+1)V_{\nu+1}^\mu(-2ik\xi)-$$

$$-\left(\frac{\mu}{2}+\nu+1\right)V_\nu^\mu(-2ik\xi)\Big]V_\nu^\mu(2ik\eta)K_s^0(\mu,\nu)-$$

$$-ik\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\nu}^{\infty}V_\nu^\mu(-2ik\xi)V_\nu^\mu(2ik\eta)M_s^0(\mu,\nu)s, \tag{13}$$

$$\eta E_\eta^{(s)}=-ik\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\nu}^{\infty}V_\nu^\mu(-2ik\xi)V_\nu^\mu(2ik\eta)M_s^0(\mu,\nu)s+$$

$$+ik\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\nu}^{\infty}\left[-(\mu+\nu)V_{\nu-1}^\mu(2ik\eta)+\left(\frac{\mu}{2}+\nu\right)V_\nu^\mu(2ik\eta)\right]\times$$

$$\times V_\nu^\mu(-2ik\xi)K_s^0(\mu,\nu), \tag{14}$$

$$E_\varphi^{(s)}=ik\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\nu}^{\infty}V_\nu^\mu(-2ik\xi)V_\nu^\mu(2ik\eta)K_s^0(\mu,\nu)s-$$

$$-ik\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\nu}^{\infty}\left[-(\mu+\nu)V_{\nu-1}^\mu(2ik\eta)+\left(\frac{\mu}{2}+\nu\right)V_\nu^\mu(2ik\eta)\right]\times$$

$$\times V_\nu^\mu(-2ik\xi)M_s^0(\mu,\nu). \tag{15}$$

В этих формулах

$$K_s^0(\mu,\nu)=\frac{1}{2}\{a[K_s^n(\mu,\nu)-M_s^n(\mu,\nu)]+b[K_s^n(\mu,\nu)+M_s^n(\mu,\nu)]\}, \tag{16}$$

$$M_s^0(\mu,\nu)=\frac{1}{2}\{b[K_s^n(\mu,\nu)+M_s^n(\mu,\nu)]-a[K_s^n(\mu,\nu)-M_s^n(\mu,\nu)]\}, \tag{17}$$

где

$$a=\frac{\left[\left(\frac{\mu}{2}+\nu\right)S_{\nu}^{\mu}-(\mu+\nu)S_{\nu-1}^{\mu}-S_{\nu}^{\mu}s\right]}{\left[\left(\frac{\mu}{2}+\nu\right)V_{\nu}^{\mu}-(\mu+\nu)V_{\nu-1}^{\mu}+V_{\nu}^{\mu}s\right]}, \tag{18}$$

$$b=\frac{\left[\left(\frac{\mu}{2}+\nu\right)S_{\nu}^{\mu}-(\mu+\nu)S_{\nu-1}^{\mu}+S_{\nu}^{\mu}s\right]}{\left[\left(\frac{\mu}{2}+\nu\right)V_{\nu}^{\mu}-(\mu+\nu)V_{\nu-1}^{\mu}+V_{\nu}^{\mu}s\right]}. \tag{19}$$

Формулами (16), (17), (18), (19) ковариантные составляющие компонент электрического поля и сами проекции физического вектора полностью определяются.

Аналогичным способом могут быть найдены ковариантные составляющие и проекции физического вектора для другого расположения диполя.

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить члена-корреспондента АН СССР А. Н. Тихонова за просмотр рукописи, ценную дискуссию и указания по направлению дальнейших исследований в этой области.

Институт автоматики и телемеханики
Академии Наук СССР

Поступило
17 II 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Г. Мириманов, ДАН, **60**, № 2 (1948).