Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 3

МАТЕМАТИКА

Х. Л. СМОЛИЦКИЙ

О ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧНОСТИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 26 II 1948)

В статье (1) акад. С. Л. Соболевым были введены обобщенные решения волнового уравнения

$$\square u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

при условии

$$u|_S = 0 \tag{2}$$

в области Ω переменных $M(x, y, z)$, ограниченной поверхностью S, имеющей непрерывные главные радиусы кривизны, минимум абсолютной величины которых положителен.

Пусть $E\{\varphi(M, t)\}$ — пространство функций, непрерывных в $(\bar{\Omega} \times t)$ $(\bar{\Omega} = \Omega + S, -\infty < t < \infty)$ и равных нулю вне конечного промежутка $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, зависящего от φ. Сильная сходимость $\varphi_n \Rightarrow \varphi$ определяется как равномерная, причем все φ_n и φ равны нулю вне одного и того же промежутка $[T_1, T_2]$.

Пусть $\tilde{E}$ есть множество дважды непрерывно дифференцируемых в $(\bar{\Omega}, t)$ функций из E. Множество функций из $\tilde{E}$, удовлетворяющих условию (2), назовем E_1, а множество функций из $\tilde{E}$, удовлетворяющих условию

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_S = 0, \tag{3}$$

назовем E_2.

Пусть E^* — пространство линейных функционалов ρ в E и (ρ, φ) — величина функционала для $\varphi \in E$.

Функционал $\rho \in E^*$ называется обобщенным решением I (II) волновой задачи, $(\rho, \square\varphi) = 0$ для всех $\varphi \in E_1$ $(\varphi \in E_2)$.

Пусть $\omega(\xi)$ — четная, имеющая непрерывные производные всех порядков функция, такая, что $\omega(\xi) = 1$, $|\xi| \leqslant \frac{1}{2}$ и $\omega(\xi) = 0$, $|\xi| \geqslant 1$, монотонная в $[\frac{1}{2}, 1]$. Пример такой функции дан в (1). Пусть $\int\limits_{-1}^{1} \omega(\xi)\, d\xi = \varkappa$.

Назовем функционал ρ_h, определенный равенством

$$(\rho_h, \varphi) = \left(\rho, \frac{1}{\varkappa h} \int_{t-h}^{t+h} \omega\left(\frac{\xi - t}{h}\right) \varphi(M, \xi)\, d\xi\right),$$

средним значением функционала ρ с весом $\omega(\xi)$.

Если для $\rho \in E^*$ имеется функция $\rho(M, t)$ такая, что для всякой $\varphi \in E$ $(\rho, \varphi) = \int\limits_t \iiint\limits_\Omega \rho(M, t)\varphi(M, t)\, d\Omega\, dt$, то $\rho(M, t)$ назовем ядром функционала ρ.

В статье ([1]) доказывается:

Теорема 1. *Если ρ есть обобщенное решение* I *волновой задачи, то ρ_h имеет ядро $\rho_h(M, t)$, имеющее непрерывные производные любого порядка в (Ω, t) и до второго порядка в $(\overline{\Omega}, t)$. Ядро ρ_h удовлетворяет* (1) *и* (2).

Ниже доказывается следующая

Теорема 2. *Если ρ есть обобщенное решение* II *волновой задачи, то ρ_h имеет ядро $\rho_h(M, t)$, имеющее непрерывные производные любого порядка в (Ω, t) и удовлетворяющее* (1). *Среднее значение функционала ρ_h имеет ядро $\rho_{hh}(M, t)$, дважды непрерывно дифференцируемое в $(\overline{\Omega}, t)$ и удовлетворяющее* (1) *и* (3).

Наметим доказательство теоремы. Пусть R есть наименьший радиус кривизны S. Возьмем $0 < \eta < R$ и $\eta < h/2$ и построим семейство функций, зависящее от параметров h, η и точек $(x_0, y_0, z_0, t_0) = (M_0, t_0)$ и $(x, y, z, t) = (M, t)$. Пусть $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$,

$$\varphi_{h,\eta}(M, t; M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi\varkappa h} \frac{1}{r} \omega\left(\frac{|t - t_0| + r}{h}\right) \omega\left(\frac{r}{\eta}\right).$$

Пусть δ — расстояние от M_0 до S. Тогда, если η_1 и η_2 меньше δ, то функция $\psi(M, t) = \varphi_{h,\eta_1} - \varphi_{h,\eta_2} \in E_2$ и, следовательно,

$$(\rho, \Box\psi) = (\rho, \Box\varphi_{h,\eta_1} - \Box\varphi_{h,\eta_2}) = 0.$$

Так как $\Box\varphi_{h,\eta_1} \in E, \Box\varphi_{h,\eta_2} \in E$, то $(\rho, \Box\varphi_{h,\eta_1}) = (\rho, \Box\varphi_{h,\eta_2})$, т. е. не зависит от η, если $\eta < \delta$.

Положим

$$(\rho, \Box\varphi_{h,\eta}) = \rho_h(M_0, t_0) \qquad (\eta < \delta). \tag{4}$$

Из (4) легко следует, что ρ_h имеет непрерывные производные любого порядка в (Ω, t) и $\Box\rho_h = 0$.

Пусть $\varphi(M, t) \in E$. Продолжим φ непрерывно вне $(\overline{\Omega}, t)$. Пусть $\overline{\Omega}_\eta$ — область, полученная из Ω присоединением всех точек M, расстояние которых до Ω не превосходит η.

Тогда можно убедиться, что

$$\int\limits_t \iiint\limits_{\overline{\Omega}_\eta} \varphi(M, t)\, \Box\varphi_{h,\eta}(M, t; M_0, t_0)\, d\Omega\, dt \underset{\eta \to 0}{\Longrightarrow}$$

$$\underset{\eta \to 0}{\Longrightarrow} \frac{1}{\varkappa h} \int\limits_{t_0 - h}^{t_0 + h} \varphi(M_0, \xi)\, \omega\left(\frac{t_0 - \xi}{h}\right) d\xi,$$

откуда, в силу линейности ρ,

$$\lim_{\eta \to 0} (\rho, \int_t \iiint_{\overline{\Omega}_\eta} \varphi(M, t) \Box \varphi_{h,\eta} \, d\Omega \, dt) = (\rho_h, \varphi). \tag{5}$$

Обозначая Ω_η совокупность точек $\underline{\Omega}$, отстоящих от S не менее чем на η, найдем, используя линейность ρ и (4):

$$(\rho, \int_t \iiint_{\overline{\Omega}_\eta} \varphi \Box \varphi_{h,\eta} \, d\Omega \, dt) = \int_t \iiint_{\underline{\Omega}_\eta} \varphi(M, t) \rho_h(M, t) \, d\Omega \, dt +$$

$$+ (\rho, \int_t \iiint_{(\overline{\Omega} - \underline{\Omega})_\eta} \varphi \Box \varphi_{h,\eta} \, d\Omega \, dt). \tag{6}$$

Рассмотрим класс функций $\varphi \in E$, равных нулю вне фиксированного $[T_1, T_2]$ и $|\varphi| \leqslant 1$. Тогда $\int_t \iiint_{\overline{\Omega}_\eta} \varphi \Box \varphi_{h,\eta} \, d\Omega \, dt$ и $\int_t \iiint_{(\overline{\Omega} - \underline{\Omega})_\eta} \varphi \Box \varphi_{h,\eta} \, d\Omega \, dt$ будут равномерно ограничены для всех функций класса и всех η, и вследствие непрерывности ρ левая часть и второе слагаемое правой части (6) равномерно ограничены. Отсюда следует ограниченность первого слагаемого, верхней точной границей которого, очевидно, является $\int_{T_1}^{T_2} \iiint_{\Omega} |\rho_h(M, t)| \, d\Omega \, dt$, т. е. ρ_h абсолютно интегрируема по $(\overline{\Omega} \times [T_1, T_2])$.

Отсюда следует существование предела первого слагаемого правой части (6), а следовательно, в силу (5), и второго слагаемого, который обозначим (ρ_S, φ). (ρ_S, φ) есть линейный функционал в классе непрерывных функций в $(S \times t)$. Таким образом,

$$(\rho_h, \varphi) = \int_t \iiint_{\Omega} \rho_h(M, t) \varphi(M, t) \, d\Omega \, dt + (\rho_S, \varphi). \tag{7}$$

Пусть $\varphi_1(M, t)$ имеет непрерывные производные любого порядка в $(\overline{\Omega}_\delta \times t)$ и равна нулю вне $[T_1, T_2)$. Пусть n (M) есть расстояние от M до S. Тогда функция $\psi_\delta(M, t) = \varphi_1(M, t) \frac{n^2}{2} \omega\left(\frac{|n|}{\delta}\right)$ такова, что

$$\text{а)}\ \psi_\delta \Big|_S = \frac{\partial \psi_\delta}{\partial n} \Big|_S = 0, \qquad \text{б)}\ \Box \psi_\delta |_S = \varphi_1,$$

$$\text{в)}\ \Box \psi_\delta = 0 \ \text{в}\ (\underline{\Omega}_\delta, t), \qquad \text{г)}\ |\Box \psi_\delta| < A$$

для всех δ.

Полагая в (7) $\varphi = \Box \psi_\delta$ и затем $\delta \to 0$, найдем $(\rho_S, \varphi_1) = 0$. Так как любая $\varphi \in E$ есть предел функций со свойствами φ_1, то и $(\rho_S, \varphi) = 0$, т. е., в силу (7), $\rho_h(M, t)$ есть ядро функционала ρ_h.

Функция

$$\rho_{hh}(M, t) = \frac{1}{\varkappa h} \int_{t-h}^{t+h} \rho_h(M, \xi) \, \omega\left(\frac{t - \xi}{h}\right) d\xi$$

является ядром среднего значения функционала ρ_h. $\partial^k \rho_{hh} / \partial t^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ абсолютно интегрируемы по Ω при произвольном фиксированном t и являются ядрами обобщенных решений волновой задачи II.

Пусть $\varphi(M)$ и $f(t)$ произвольны, но таковы, что $\varphi(M)f(t) \in E_2$. Тогда

$$\left(\frac{\partial^k \rho_{hh}}{\partial t^k}, \Box(\varphi f)\right) = 0 .$$

Интегрируя по частям, ввиду произвольности $f(t)$, найдем

$$\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial^k \rho_{hh}}{\partial t^k} \Delta\varphi - \varphi \frac{\partial^{k+2} \rho_{hh}}{\partial t^{k+2}}\right) d\Omega = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad (8)$$

Пусть $G(M, M_1)$ — функция Грина для внутренней задачи Неймана. Ее можно выбрать симметричной относительно M и M_1. $G(M, M_1)$ интегрируема с квадратом по M при фиксированной M_1, и величина интеграла равномерно ограничена относительно $M_1 \in \overline{\Omega}$.

Если $\psi(M_1)$ непрерывно дифференцируема в $\overline{\Omega}$ и $\iiint\limits_{\Omega} \psi(M)\, d\Omega = 0$, то функция

$$\varphi(M) = \iiint\limits_{\Omega} G(M, M_1)\, \psi(M_1)\, d\Omega_1 \qquad (9)$$

такова, что $\Delta\varphi = \psi$ и $\partial\varphi / \partial n |_S = 0$.

Полагая в (8) φ из (9) и переставляя порядок интегрирования получим, в силу произвольности $\psi(M_1)$:

$$\frac{\partial^k \rho_{hh}}{\partial t^k} = \iiint\limits_{\Omega} G(M, M_1) \frac{\partial^{k+2} \rho_{hh}}{\partial t^{k+2}} d\Omega + C_1 + C_2 t \quad (k=0, 1, 2, \ldots). \quad (10)$$

Так как $\partial^{k+2} \rho_{hh} / \partial t^{k+2}$ абсолютно интегрируема, то из (10) последовательно докажем, что $\partial^k \rho_{hh} / \partial t^k$ интегрируема с квадратом, непрерывна и, наконец, двукратно дифференцируема, что и доказывает теорему.

Из статьи ([2]) следует почти-периодичность ρ_{hh}.

Пусть $\rho(M, t)$ есть ядро обобщенного решения I (II) задачи. Если $\rho(M, t)$ имеет обобщенные производные первого порядка, суммируемые с квадратом по Ω, то порождаемая $\rho(M, t)$ траектория почти-периодична, что легко следует из теоремы 1 ([2]).

Поступило
26 II 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, ДАН, 49, № 1 (1945). [2] С. Л. Соболев, ДАН, 48, № 8 (1945).