Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 3

МАТЕМАТИКА

А. П. НОРДЕН

РИМАНОВА МЕТРИКА НА ПОВЕРХНОСТЯХ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 26 II 1948)

Назовем сеть поверхности трехмерного проективного пространства сетью J, если ее оси и ребра Грина образуют конгруенции, которые соответственно сопряжены и гармоничны поверхности.

В работе [1] показано, что внутренняя геометрия поверхности, нормализованной осями и ребрами некоторой сети, образует пару сопряженных метрик Вейля, а данная сеть совпадает с сетью изотропных линий метрики первого рода.

С другой стороны, если конгруенции нормалей первого и второго рода соответственно сопряжены и гармоничны поверхности, то внутренние геометрии образуют эквиаффинную пару [1].

Вследствие этого сеть J характеризуется тем, что внутренняя геометрия поверхности, нормализованной осями и ребрами этой сети, образует пару сопряженных римановых метрик.

Из общих свойств такой пары отметим следующие:

А. Угол между двумя направлениями, измеренный по отношению к метрике первого рода, равен углу между направлениями, сопряженными данным, измеренному по отношению к метрике второго рода [1].

В. Тензор асимптотической сети может быть пронормирован так, что после этого будет удовлетворять уравнению Кодацци по отношению к обеим метрикам [1].

С. Интегральные кривизны первого и второго рода всякой области могут отличаться только постоянным множителем [1].

Назовем сеть сетью J_1, если касательные прямые к линиям обеих ее семейств касаются одной и той же поверхности второго порядка или второго класса Q_2, которая не распадается на пару плоскостей и не совпадает с данной поверхностью. Всякая сеть J_1 есть сеть J, так как, если Q_2 принята за абсолют проективной метрики, то оси сети совпадают с метрическими нормалями поверхности, а ее внутренние геометрии будут индуцированы метрикой длин и метрикой углов внешнего пространства и образуют риманову пару, причем данная сеть совпадает с изотропной сетью поверхности.

Из определения непосредственно следует, что на всякой поверхности существует ∞^9 сетей J_1.

Необходимое условие того, что сопряженная пара римановых метрик соответствует сети J_1, имеет следующий вид

$$Ak \pm B\varkappa = k\varkappa,$$

где k и $\varkappa$ — гауссовы кривизны первого и второго рода, а A и B — постоянные. Если Q_2 — невырождающаяся поверхность, то $A \neq 0$, $B \neq 0$; если Q_2 — вырождающаяся поверхность второго класса, то $A \neq 0$, $B = 0$; если Q_2 — вырождающаяся поверхность второго порядка, то $A = 0$, $B \neq 0$.

Назовем сеть сетью J_0, если она образована двумя семействами плоских кривых, плоскости которых принадлежат двум пучкам с осями, пересекающимися в некоторой точке O. Очевидно, что оси такой сети проходят через точку O, а ее ребра лежат в плоскости Ω, содержащей эту точку. Вследствие этого сеть J_0 может рассматриваться как частный случай сети J, а соответствующие ей внутренние геометрии поверхности образуют евклидову сопряженную пару ([2]).

Из определения непосредственно следует, что на всякой поверхности существует ∞^7 сетей J_0.

Всякую сеть J, не являющуюся сетью J_0 или J_1, мы будем называть сетью J'_1, если она определяет на поверхности пару римановых геометрий с кривизнами, отличными от нуля, или сетью J'_0, если эти геометрии евклидовы.

Приведем примеры сетей J.

1. Для того чтобы сопряженная сеть была сетью J, необходимо и достаточно, чтобы она была сетью Ионаса. Как известно, такие сети характеризуют своим существованием поверхности Ионаса и существуют попарно, гармонически разделяя друг друга ([3]).

2. Приняв Q_2 сопряженной сети J_1 за абсолют, мы убеждаемся в том, что она проективно эквивалентна изотропной сети минимальной поверхности пространства постоянной кривизны. Отсюда следует, что всякая такая поверхность принадлежит классу Ионаса, а ее изотропная сеть и сеть линий кривизны будут сетями J_1 и J'_1 соответственно.

3. Сопряженная сеть J'_0 есть двойная сеть Кенигса ([4]) или получена из нее проективным изгибанием поверхности. Будучи сопряженной сетью J, двойная сеть Кенигса будет сетью Ионаса, а значит, и сопряженная сеть, гармонически разделяющая данную, будет сетью J. Примером может служить поверхность вращения с ее сетью меридианов и параллелей и характеристической сетью.

4. Всякая изотермически-сопряженная сеть на поверхности второго порядка принадлежит классу J'_0, а сеть, образованная двумя семействами плоских сечений этой поверхности, есть сопряженная сеть J_0, если плоскости сечений принадлежат двум пучкам с осями, касающимися поверхности по двум сопряженным полярам.

5. Рассмотрим две кривые, расположенные на поверхности вращения симметрично относительно некоторой меридиальной плоскости. Вращая эти кривые вокруг оси поверхности, мы получим сеть, которую назовем сетью вращения. Всякая сеть вращения и всякая сеть, полученная из нее проективным изгибанием, есть сеть J.

6. Рассмотрим две конаксиальные сети J, т. е. предположим, что их оси Грина совпадают между собой. Предполагая, что ребра этих сетей различны, мы можем нормализовать поверхность двумя способами так, что рассматриваемые сети будут изотропными для двух различных римановых метрик первого рода. Однако, в силу совпадения нормалей первого рода, геодезические линии обеих метрик будут тождественны ([1]) и, следовательно, они будут метриками Луивилля. Однако всякая метрика Луивилля допускает по крайней мере ∞^1 геодезических отображений на метрики того же типа. Вследствие этого, если некоторая сеть J допускает существование конаксиальной ей сети J, то она допускает существование ∞^1 таких же сетей.

Следуя Дубнову, будем называть сетью Риччи такую сеть, которая переходит в изотропную при геодезическом отображении римановой метрики на другую такую же метрику. На основании предыдущего мы приходим к следующему выводу: для того чтобы геодезическая сеть внутренней метрики, входящей в состав римановой пары внутренних метрик нормализованной поверхности, была сетью Риччи, необходимо и достаточно, чтобы она была сетью J.

На поверхностях, метрически наложимых на поверхности вращения, сети Риччи соответствуют геодезическим сетям вращения, и, следовательно, их множество зависит по крайней мере от двух параметров.

На поверхностях постоянной гауссовой кривизны евклидова или неевклидова пространства сетью Риччи будет всякая сеть, которая переходит в сеть прямых, касающихся некоторой кривой второго класса при геодезическом отображении поверхности на плоскость. Сеть принадлежит классу J'_0, если соответствующая ей кривая распадается на пару пучков, и классу J'_1 в противоположном случае. Вследствие этого на поверхности постоянной гауссовой кривизны существует ∞^5 сетей J'_1 и ∞^4 J'_0.

Проективной наложимости может быть дано следующее новое определение, равносильное определению Фубини: для того чтобы две поверхности были проективно наложимы друг на друга, необходимо и достаточно, чтобы всякой нормализации одной из них соответствовала такая нормализация другой, при которой пары их внутренних геометрий совпадают между собой.

Вследствие этого, изгибая поверхность, можно так деформировать нормализующие ее конгруенции, чтобы внутренние римановы метрики, определенные сетью J, сохранялись, а отсюда, в свою очередь, следует, что всякая сеть J переходит в сеть J при проективном изгибании поверхности.

Принимая во внимание установленное выше число сетей J_1 и сетей J_0, существующих на всякой поверхности, мы приходим к следующему результату: на всякой проективно изгибаемой поверхности существует ∞^{9+k} сетей J'_1 и ∞^{7+k} сетей J'_0, которые соответствуют сетям J_1 и J_0 на поверхностях, изгибаемых в данную, где k есть число параметров изгибания.

Так как всякая линейчатая поверхность изгибается с произволом, зависящим от функции одного аргумента, то и множество сетей J на такой поверхности зависит от произвольной функции одного аргумента.

Существование сетей J'_0 характеризует изгибаемые поверхности. Отсюда непосредственно следует, что поверхности с двойной сетью Кенигса, поверхности вращения, поверхности постоянной гауссовой кривизны, а также расслояющие поверхности сопряженной пары конгруенций ([5]) изгибаемы проективно.

Поступило
30 I 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Норден, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, МГУ, в. 6 (1945). [2] А. Норден, там же, в. 2—3 (1935). [3] H. Jonas, Berl. Math. Gesellshaft, 19 (1921). [4] G. Fubini et E. Cech, Introduction à la géometrie projective différentielle des surfaces, Paris, 1931, p. 204. [5] С. П. Фиников, Проективно-дифференциальная геометрия, М., 1937, стр. 187.