Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 3

МАТЕМАТИКА

М. И. МИНКЕВИЧ

ЗАМКНУТЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ВОРОНКИ В ОБОБЩЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ БЕЗ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 25 II 1948)

В метрическом компактном пространстве R рассматриваются однопараметрические системы отображений (S_t) этого пространства на самого себя, имеющие следующие свойства:

1. Каждой точке $p \in R$ для каждого значения параметра t $(-\infty < t < +\infty)$ приводится в соответствие определенное замкнутое множество из R, обозначаемое $S_p(t)$, причем $S_p(0)=p$; множеству $F \subset R$ приводится в соответствие множество $S_F(t) = \sum\limits_{p \in F} S_p(t)$.

Множество $\sum\limits_{t} S_p(t) = T_p$ для $-\infty < t < +\infty$ называется воронкой точки p, а для $t \geqslant 0$ или $t \leqslant 0$, соответственно, правой (T_p^+) или левой (T_p^-) полуворонкой. Множества $S_p(t)$ называются сечениями воронки T_p. Точка p называется точкой единственности справа (или слева), если множества $S_p(t)$ при $t \geqslant 0$ (или $t \leqslant 0$) хотя бы до некоторого значения t являются точками.

2. Свойство группы при t_1 и t_2 одного знака:

$$S_{S_p(t_1)}(t_2) = S_p(t_1 + t_2).$$

3. Свойство обратимости, выражаемое соотношениями:

$$\text{если } q \in S_p(t), \text{ то } p \in S_q(-t).$$

4. Непрерывность отображений по параметру: для точки $p \in R$, t и $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для $|t' - t| < \delta$ имеется

$$\alpha[S_p(t'),\ S_p(t)] < \varepsilon,$$

где α — символ отклонения множеств в смысле Хаусдорфа.

5. Иногда на отображения налагается требование непрерывности по области: для точки $p \in R$, любых $\tau > 0$ и $\varepsilon > 0$ должно существовать такое $\delta(\varepsilon, \tau) > 0$, что для точек $q \in R$, выполняющих условие $\rho(p, q) < \delta$, где ρ — символ расстояния, имеет место неравенство

$$\alpha[S_p(t),\ S_q(t)] < \varepsilon \qquad (0 \leqslant t < \tau).$$

Точки p, отображения которых удовлетворяют этому требованию, называются точками непрерывности.

Системы (S_t) являются обобщениями отображений, даваемых системами дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad i=1,2, \ldots, n, \tag{D}$$

в которых правые части предположены непрерывными, но не подчинены дополнительным ограничениям, гарантирующим единственность решений.

В настоящей работе обобщаются на воронки систем (S_t) и (D) понятия устойчивости по Пуассону и периодичности и исследуются некоторые специфические образования этих систем, так называемые „замкнутые воронки", которые не являются сплошь периодическими, но становятся таковыми, начиная с некоторого значения параметра.

Определение 1. Воронка T_p системы (S_t) называется замкнутой в каком-нибудь направлении, если: 1) ограничено множество минимальных значений $|t|$, отвечающих всем точкам q соответствующей полуворонки на основании соотношения $q \in S_p(t)$; 2) для каждой точки этой полуворонки $q \in S_p(t')$ существует такое значение $t=t''$ одного знака с t', что имеет место соотношение

$$p \in S_q(t''). \tag{1}$$

Теорема 1. *В замкнутой воронке ограничено множество значений t'', соответствующих точкам воронки на основании соотношения* (1).

Теорема 2. *Для каждой точки q замкнутой воронки T_p системы (D) существует траектория, приводящая из q в p и не совпадающая полностью ни с одной траекторией, приводящей из p в q.*

В том же направлении, в каком является замкнутой рассматриваемая воронка, замкнуты и воронки всех точек ее; более того, эти полуворонки совпадают с исходной. Вследствие бесконечной возвращаемости в вершину воронки каждая ее точка является ω- и α-предельной, и все предельные точки такого направления, в котором воронка замкнута, принадлежат воронке.

Сечения замкнутых воронок обладают следующими свойствами:

Теорема 3. *Если воронка T_p замкнута, то для каждого сечения $S_p(t')$, взятого в направлении замкнутости ее, существует такое t'' ($|t''|>|t'|$ и t'' одного знака с t'), что*

$$S_p(t') \subseteq S_p(t'+t'').$$

Теорема 4. *Начиная с некоторого значения параметра t, сечения замкнутой полуворонки периодически повторяются.*

Введем понятие устойчивости по Пуассону точек и сечений и рекуррентности воронок.

Определение 2. Сечение $S_p(\tau)$ воронки T_p (в частности, сама точка $p=S_p(0)$) называется положительно-устойчивым по Пуассону при $t \geqslant 0$ (отрицательно-устойчивым при $t \leqslant 0$), если для любых $\varepsilon>0$ и $T>0$ $(T<0)$ существует такое $t \geqslant T$ $(t \leqslant T)$, что выполняется неравенство

$$\alpha[S_p(\tau), S_p(\tau+t)]<\varepsilon.$$

Теорема 5. *Если сечение $S_p(t_0)$ состоит из точек непрерывности и устойчиво в каком-нибудь направлении (в частности, если $p=S_p(0)$ является точкой непрерывности и устойчива), то и каж-*

дое сечение $S_p(\tau)$ при $|\tau|>|t_0|$ (знаки τ и t_0 одинаковы) является устойчивым в том же направлении.

Определение 3. Воронка T_p называется положительно-(отрицательно-) рекуррентной, если для каждого $\varepsilon>0$ найдется такое число $l(\varepsilon)>0$ ($l(\varepsilon)<0$), что для любых $t'>0$, $t''>0$ ($t'<0$, $t''<0$) существует такое τ, $0\leqslant\tau\leqslant l$ ($0\geqslant\tau\geqslant l$), что имеет место неравенство

$$\alpha[S_p(t'),\ S_p(t''+\tau)]<\varepsilon.$$

Теорема 6. *В полуворонке, рекуррентной в соответствующем ей направлении изменения t, все сечения устойчивы в том же направлении.*

Для воронок, расположенных на плоскости и определенных системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=X(x,\ y),\qquad \frac{dy}{dt}=Y(x,\ y),$$

имеет место

Теорема 7. *Если точка p, имеющая воронку на плоскости, устойчива по Пуассону в каком-нибудь направлении, то воронка ее замкнута в том же направлении и, мало того, периодична в том же направлении.*

Частным случаем замкнутых воронок являются периодические воронки, которые могут вырождаться в периодические траектории.

Определение 4. Воронка T_p называется положительно- (отрицательно-) периодической, если существует такое число $\tau>0$ ($\tau<0$), что имеет место для всех $t\geqslant 0$ ($t\leqslant 0$) соотношение

$$S_p(t+\tau)=S_p(t).$$

Необходимым и достаточным условием периодичности воронки в каком-нибудь направлении является выполнение соотношения $S_p(\tau)=p$ при некотором фиксированном $\tau\neq 0$.

Для воронок, определяемых системами (D), имеют место теоремы:

Теорема 8. *Если воронка T_p периодична в обоих направлениях, то периоды этих направлений равны по абсолютной величине и, кроме того, сечения каждой полуворонки периодичны в обоих направлениях.*

Теорема 9. *Периодическая в каком-нибудь направлении воронка, все точки которой устойчивы по Пуассону в том же направлении, состоит из односторонних точек единственности того же направления.*

Для того чтобы точки периодической воронки были точками единственности, достаточно потребовать, чтобы были устойчивыми точки одной из траекторий воронки или, хотя бы по одной, точки в каждом сечении воронки.

Поступило
25 II 1948