Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 3

МАТЕМАТИКА

А. П. ГРЕМЯЧЕНСКИЙ

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 25 II 1948)

Доказывается теорема о существовании по крайней мере одной системы таких вещественных чисел $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, что система нелинейных интегральных уравнений

$$\mu_i u_i(x)=\int_{(B)} K_i(x, y) f_i [y, u_1(y), \ldots, u_n(y)] dy, \qquad i=1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

имеет, помимо нулевых решений, еще решения, не равные нулю тождественно.

Следующие условия предполагаются выполненными:

1. Все интегралы распространены на одну и ту же конечную и ограниченную область B одного или нескольких измерений.

2. Ядра $K_i(x, y)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ вещественные, непрерывные, положительно определенные симметрические функции при $x \in B$, $y \in B$.

3. Функции $f_i(y, u_1, u_2, \ldots, u_n)$ вещественные и непрерывные при $y \in B$ и u_i, заключенных в некоторых интервалах (a_i, b_i) $(i=1, 2, \ldots, n)$, содержащих в себе 0.

4. Существует такая функция $F(y, u_1, \ldots, u_n)$, что

$$\frac{\partial F}{\partial u_i}=f_i(y, u_1, u_2, \ldots, u_n). \tag{2}$$

5. Уравнения системы (1) однородны в том смысле, что выполняется $f_i(y, 0, 0, \ldots, 0)\equiv 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. При этом, очевидно, можно предположить $F(y, 0, 0, \ldots, 0)\equiv 0$.

Теорема доказывается методом, аналогичным тому, которым пользуется Голомб [1] при доказательстве теоремы для одного нелинейного интегрального уравнения.

§ 1. Обозначим через $\lambda_{i\nu}$ собственные значения ядер $K_i(x, y)$, расположенные в порядке возрастания их, и через $\varphi_{i\nu}(x)$ — соответствующие им фундаментальные функции. Вследствие условия 2 все числа $\lambda_{i\nu}$ положительны.

Напишем вспомогательную систему нелинейных интегральных уравнений с вырожденными ядрами:

$$^m\mu_i {}^m u_i(x) - \int_{(B)} {}^m K_i(x, y) f_i[y, {}^m u_1(y), \ldots, {}^m u_n(y)] dy=0, \tag{3}$$

$$i=1, 2, \ldots, n,$$

где

$$ {}^mK_i(x, y) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{\lambda_{i\nu}} \varphi_{i\nu}(x)\varphi_{i\nu}(y). \tag{4} $$

Рассмотрим функцию от координат n точек $P_i(z_{i1}, z_{i2}, \ldots, z_{im})$ в пространстве m измерений:

$$ H(z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{nm}) = \int\limits_{(B)} F\left[y, \sum_{\nu=1}^{m} z_{1\nu}\varphi_{1\nu}(y), \ldots, \sum_{\nu=1}^{m} z_{n\nu}\varphi_{n\nu}(y)\right] dy. \tag{5} $$

В силу условий 3 и 4 как функция H, так и ее частные производные первого порядка будут непрерывны в некоторой окрестности нулевых значений аргументов $z_{i\nu}$. Поэтому, если точки P_i будут описывать поверхности n m-мерных эллипсоидов:

$$ \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_{i\nu} z_{i\nu}^2 = c_i^2, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{6} $$

то функция $H(z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{nm})$ будет достигать как наибольшего, так и наименьшего значений.

Пусть наибольшее значение D_m достигается в некоторых точках $Q_i({}^mA_{i1}, {}^mA_{i2}, \ldots, {}^mA_{im})$ поверхностей гиперэллипсоидов (6), а наименьшее d_m — в точках $q_i({}^ma_{i1}, {}^ma_{i2}, \ldots, {}^ma_{im})$. Тогда для точек Q_i и q_i будут выполняться необходимые условия условного экстремума функции H при условиях (6), которые легко напишем, составив функцию Лагранжа:

$$ \Phi(z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{nm}) = 2H(z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{nm}) - \sum_{i=1}^{m} \mu_i \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_{i\nu} z_{i\nu}^2, $$

т. е. существуют по крайней мере две системы вещественных и отличных от нуля (вследствие (6)) решений системы уравнений (6) и уравнений

$$ \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial z_{i\nu}} = -\mu_i \lambda_{i\nu} z_{i\nu} + $$

$$ + \int\limits_{(B)} \varphi_{i\nu}(y) f_i\left[y, \sum_{\nu=1}^{m} z_{1\nu}\varphi_{1\nu}(y), \ldots, \sum_{\nu=1}^{m} z_{n\nu}\varphi_{n\nu}(y)\right] dy = 0, \tag{7} $$

$$ i = 1, 2, \ldots, n, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, m. $$

Таким образом, для вещественных чисел ${}^mA_{i\nu}$, ${}^ma_{i\nu}$, ${}^mM_i$, ${}^m\mu_i$ соотношения (6) и (7) выполняются тождественно:

$$ \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_{i\nu} {}^mA_{i\nu}^2 = c_i^2, \tag{8} $$

$$ \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_{i\nu} {}^ma_{i\nu}^2 = c_i^2, \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{9} $$

$$ {}^mM_i \lambda_{i\nu} {}^mA_{i\nu} = \int\limits_{(B)} \varphi_{i\nu}(y) f_i\left[y, \sum_{\nu=1}^{m} {}^mA_{1\nu}\varphi_{1\nu}(y), \ldots, \sum_{\nu=1}^{m} {}^mA_{n\nu}\varphi_{n\nu}(y)\right] dy; \tag{10} $$

$$
{}^m\mu_i \lambda_{i\nu} {}^m a_{i\nu} = \int\limits_{(B)} \varphi_{i\nu}(y) f_i \left[y, \sum_{\nu=1}^{m} {}^m a_{1\nu} \varphi_{1\nu}(y), \ldots, \sum_{\nu=1}^{m} {}^m a_{n\nu} \varphi_{n\nu}(y) \right] dy, \quad (11)
$$

$$
i = 1, 2, \ldots, n, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, m.
$$

Умножая каждое из уравнений (10) и (11) на $\frac{1}{\lambda_{i\nu}} \varphi_{i\nu}(x)$ и суммируя по ν, получим, учитывая (4):

$$
{}^m M_i \sum_{\nu=1}^{m} {}^m A_{i\nu} \varphi_{i\nu}(x) \equiv
$$

$$
\equiv \int\limits_{(B)} {}^m K_i(x, y) f_i \left[y, \sum_{\nu=1}^{m} {}^m A_{1\nu} \varphi_{1\nu}(y), \ldots, \sum_{\nu=1}^{m} {}^m A_{n\nu} \varphi_{n\nu}(y) \right] dy,
$$

$$
{}^m\mu_i \sum_{\nu=1}^{m} {}^m a_{i\nu} \varphi_{i\nu}(x) \equiv
$$

$$
\equiv \int\limits_{(B)} {}^m K_i(x, y) f_i \left[y, \sum_{\nu=1}^{m} {}^m a_{1\nu} \varphi_{1\nu}(y), \ldots, \sum_{\nu=1}^{m} {}^m a_{n\nu} \varphi_{n\nu}(y) \right] dy,
$$

$$
i = 1, 2, \ldots, n,
$$

т. е. функции

$$
{}^m U_i(x) = \sum_{\nu=1}^{m} {}^m A_{i\nu} \varphi_{i\nu}(x), \quad (12)
$$

$$
{}^m v_i(x) = \sum_{\nu=1}^{m} {}^m a_{i\nu} \varphi_{i\nu}(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \quad (13)
$$

являются нетривиальными, вследствие (8) и (9), решениями вспомогательной системы интегральных уравнений (3), соответствующими собственным значениям ${}^m M_i$ и ${}^m\mu_i$ параметров μ_i.

Умножая каждое из уравнений системы (10) на ${}^m A_{i\nu}$ и системы (11) — на ${}^m a_{i\nu}$ и суммируя по ν, получим, учитывая (8), (9), (12) и (13):

$$
{}^m M_i = \frac{1}{c_i^2} \int\limits_{(B)} {}^m U_i(y) f_i [y, {}^m U_1(y), \ldots, {}^m U_n(y)] \, dy, \quad (14)
$$

$$
{}^m\mu_i = \frac{1}{c_i^2} \int\limits_{(B)} {}^m v_i(y) f_i [y, {}^m v_1(y), \ldots, {}^m v_n(y)] \, dy. \quad (15)
$$

§ 2. Подставляя систему функций (12) или (13) в уравнения (1), получим в правых частях этих уравнений остаточные члены ${}^m R_i$, которые, вследствие равномерной (по теореме Мерсера) сходимости билинейных форм ядер $K_i(x, y)$, можно переписать в виде:

$$
{}^m R_i(x) = \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \frac{\varphi_{i\nu}(x)}{\lambda_{i\nu}} \int\limits_{(B)} \varphi_{i\nu}(y) f_i [y, {}^m u_1(y), \ldots, {}^m u_n(y)] \, dy, \quad (16)
$$

$$
i = 1, 2, \ldots, n.
$$

Применяя неравенство Коши — Шварца, будем иметь оценку:

$$
|{}^m R_i(x)| \leqslant
$$

$$
\leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda_{i,m+1}}} \left\{ \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \frac{\varphi_{i\nu}^2(x)}{\lambda_{i\nu}} \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \left[\int\limits_{(B)} \varphi_{i\nu}(y) f_i [y, {}^m u_1(y), \ldots, {}^m u_n(y)] \, dy \right]^2 \right\}^{1/2}.
$$

Вследствие ограниченности ядер $K_i(x, y)$:

$$\sum_{\nu=m+1}^{\infty} \frac{\varphi_{i\nu}^2(x)}{\lambda_{i\nu}} < \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_{i\nu}^2(x)}{\lambda_{i\nu}} = K_i(x, x) < N,$$

$$\sum_{\nu=m+1}^{\infty} \left[\int_{(B)} \varphi_{i\nu}(y) f_i(y, {}^m u_1(y), \ldots, {}^m u_n(y) \, dy \right]^2 < \varepsilon$$

как остаточный член сходящегося ряда, составленного из квадратов коэффициентов Фурье функции $f_i[y, {}^m u_1(y), \ldots, {}^m u_n(y)]$ по системам функций $\varphi_{i\nu}(y)$. Отсюда заключаем, что остатки ${}^m R_i(x)$ равномерно стремятся к нулю при $m \to \infty$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Полагая далее $m=1, 2, \ldots$, будем иметь систему последовательностей равномерно непрерывных и равностепенно ограниченных в своей совокупности функций ${}^m U_i(x)$ и ${}^m v_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. В каждой из этих последовательностей может быть выделена некоторая подпоследовательность, сходящаяся к некоторой предельной функции $U_i(x)$, $v_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Совокупность этих предельных функций дает две различные системы решений уравнений (1). Остается лишь убедиться, что обе системы предельных функций не могут сводиться одновременно к нулевым тривиальным решениям системы (1).

Рассмотрим для этого последовательности чисел D_m и d_m, для которых, очевидно, справедливы неравенства:

$$D \geqslant D_{m+1} \geqslant D_m \geqslant \ldots \geqslant d_m \geqslant d_{m+1} \geqslant \ldots \geqslant d,$$

где $D = \lim\limits_{m\to\infty} D_m$ и $d = \lim\limits_{m\to\infty} d_m$.

Из (5) вытекает:

$$D_m = \int_{(B)} F[y, {}^m U_1(y), \ldots, {}^m U_n(y)] \, dy,$$

и, следовательно,

$$D = \int_{(B)} F[y, U_1(y), \ldots, U_n(y)] \, dy;$$

аналогично:

$$d = \int_{(B)} F[y, v_1(y), \ldots, v_n(y)] \, dy.$$

Если бы обе системы предельных функций сводились к тождественному нулю, то $D=d=0$, а следовательно, и все $D_m = d_m = 0$, но в этом случае

$$H(z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{nm}) \equiv 0, \tag{17}$$

и, следовательно, существуют такие отличные от нуля значения $z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{nm}$, для которых выполняются уравнения (6), так как в силу (17) при $\mu_i = 0$ соотношения (7) выполняются тождественно. Таким образом, и в этом случае существуют нетривиальные решения.

Поступило
25 II 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Golomb, Math. Z., 39, 45 (1935).