Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 3

МАТЕМАТИКА

Д. Л. БЕРМАН

ОБ ОДНОМ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОМ ПРОЦЕССЕ АКАД. С. Н. БЕРНШТЕЙНА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 27 II 1948)

1°. Акад. С. Н. Бернштейн ([1]) построил равномерно сходящийся для любой непрерывной функции интерполяционный процесс, у которого отношение степени интерполяционного полинома к числу узлов сколь угодно близко к единице. При этом в основу своего построения С. Н. Бернштейн положил чебышевскую матрицу узлов.

В настоящей работе мы хотим распространить интерполяционный процесс С. Н. Бернштейна на довольно широкий класс матриц узлов.

Пусть задана треугольная матрица узлов

$$\begin{array}{llll} x_1^{(1)} & & & \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & & \\ \cdots & & & \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \ldots & x_n^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \qquad (1)$$

$$-1 \leqslant x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} \leqslant 1 \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Введем следующие обозначения:

$$\Delta_n = \max_{k=1, 2, \ldots, n-1} \left[\left(x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)} \right) \right].$$

Через $\sigma(a, b)$ мы обозначим количество узлов n-й строчки матрицы (1), удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x_j^{(n)} \leqslant b$.

Пусть

$$\omega_n(x) = \prod_{j=1}^{n} (x - x_j^{(n)}) \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

$$l_j^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_j^{(n)})\, \omega_n'(x_j^{(n)})} \qquad (j=1, 2, \ldots, n;\ n=1, 2, \ldots).$$

Определим интерполяционный процесс С. Н. Бернштейна. Пусть задана произвольная матрица (1) и функция $f(x)$, определенная в интервале $[-1, 1]$.

Строим полиномы

$$L_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)}\, l_k^{(n)}(x), \tag{2}$$

где числа $\{A_k^{(n)}\}_{k=1}^{n}$ определяются следующим образом:

$$A_k^{(n)}=f(x_k^{(n)}), \qquad k\not\equiv 0 \pmod{2l}, \tag{3}$$

$$A_{2lt}^{(n)}=\sum_{j=1}^{l} f\left(x_{2l(t-1)+2j-1}^{(n)}\right)-\sum_{j=1}^{l-1} f\left(x_{2l(t-1)+2j}^{(n)}\right), \tag{4}$$

где l — произвольное фиксированное натуральное число.

2°. Теорема 1. *Пусть матрица* (1) *удовлетворяет следующим условиям:*

A. $\Delta_n\to 0$ *при* $n\to\infty$.

B. *В точке* $x_0\in[-1,1]$ *выполняются неравенства*

при $x_k^{(n)}<x_{k+1}^{(n)}\leqslant x_0 \quad |l_k^{(n)}(x_0)|\leqslant|l_{k+1}^{(n)}(x_0)| \quad (n=n_0,\ n_0+1,\ldots)$;

при $x_0\leqslant x_k^{(n)}<x_{k+1}^{(n)}\ |l_k^{(n)}(x_0)|\geqslant|l_{k+1}^{(n)}(x_0)| \quad (n=n_0,\ n_0+1,\ldots)$.

C. *Если* $\sigma(x_0,x_j^{(n)})=h$, *то* $|l_j^{(n)}(x_0)|\leqslant K(x_0)\varphi(h) \quad (n=n_0,\ n_0+1,\ldots)$, *где* $K(x_0)$ — *неотрицательное конечное число и* $\varphi(h)$ — *произвольная неотрицательная функция от* h, *удовлетворяющая условию* $\varphi(h)\to 0$ *при* $h\to\infty$.

Тогда интерполяционный процесс С. Н. Бернштейна, построенный для функции $f(x)$, *ограниченной в интервале* $[-1,1]$ *и непрерывной в точке* x_0, *сходится к* $f(x_0)$.

Доказательство. Мы будем считать, что $x_0\neq x_k^{(n)}$, ибо в противном случае, как легко видеть, разность $L_n(f,x_0)-f(x_0)$ равна нулю или стремится к нулю при $n\to\infty$. Так как $\sum_{k=1}^{n} l_k^{(n)}(x)\equiv 1$, то

$$L_n(f,x_0)-f(x_0)=\sum_{k=1}^{n}[A_k^{(n)}-f(x_0)]\,l_k^{(n)}(x_0)=$$

$$=\sum_{x_k^{(n)}<x_0}{}'\,[A_k^{(n)}-f(x_0)]\,l_k^{(n)}(x_0)+\sum_{x_k^{(n)}>x_0}{}''\,[A_k^n-f(x_0)]\,l_k^{(n)}(x_0).$$

Будем рассматривать $\sum''$, ибо рассуждения для $\sum'$ аналогичны. Пусть $x_p^{(n)}<x_0<x_{p+1}^{(n)}$. Обозначим через $M_h^{(1)}$ множество узлов n-й строчки матрицы, удовлетворяющих неравенствам $x_0<x_j^{(n)}\leqslant x_{p+h}^{(n)}$. Через $M_h^{(2)}$ обозначим множество узлов n-й строчки матрицы, удовлетворяющих неравенствам $x_{p+1}^{(n)}<x_j^{(n)}\leqslant+1$. Пусть $\omega_{x_0}(2\delta)=$ $=\sup|f(x_1)-f(x_2)|$, $x_1,x_2\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

Сумму $\sum''$ разбиваем следующим образом:

$$\sum{}''[A_k^{(n)}-f(x_0)]\,l_k^{(n)}(x_0)=$$

$$=\sum_{x_k^{(n)}\in M_h^{(1)}}{}_1\,[A_k^{(n)}-f(x_0)]\,l_k^{(n)}(x_0)+\sum_{x_k^{(n)}\in M_h^{(2)}}{}_2\,[A_k^{(n)}-f(x_0)]\,l_k^{(n)}(x_0). \tag{5}$$

Так как $\varphi(h) \to 0$ при $h \to \infty$, то существует такое число F, что $\varphi(h) < F$ $(h=1, 2, \ldots)$. Поэтому, согласно условию С:

$$|l_j^{(n)}(x_0)| \leqslant K(x_0) F \quad (j=1, 2, \ldots, n;\ n=n_0, n_0+1, \ldots). \tag{6}$$

Из (3), (4) и (6) следует

$$\left| \sum\nolimits_1 [A_k^{(n)} - f(x_0)]\, l_k^{(n)}(x_0) \right| \leqslant 2K(x_0)\, Fh\, \omega_{x_0}(2h\,\Delta_n). \tag{7}$$

Так как матрица (1) удовлетворяет условию В, то можно получить такую оценку ($M = \sup\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$):

$$\left| \sum\nolimits_2 [A_k^{(n)} - f(x_0)]\, l_k^{(n)}(x_0) \right| \leqslant (12l+1)\, M \left| l_{p+h}^{(n)}(x_0) \right|. \tag{8}$$

Из (5), (7), (8) и условия С следует, что

$$\sum{}'' [A_k^{(n)} - f(x_0)]\, l_k^{(n)}(x_0) \Big| \leqslant 2K(x_0)\, Fh\omega_{x_0}(2h\Delta_n) + (12l+1)\, M\, |l_{p+h}^{(n)}(x_0)|.$$

Аналогичное неравенство имеет место для $\sum'$.

Из этих неравенств уже непосредственно следует теорема 1.

Замечание 1. Пусть матрица (1) удовлетворяет условию А, в каждой точке интервала $[-1, 1]$ имеют место условия В и С и

$$K(x) \leqslant m, \qquad x \in [-1, 1] \tag{9}$$

(m — конечное неотрицательное число). Пусть $f(x)$ непрерывна в $[-1, 1]$. Тогда интерполяционный процесс С. Н. Бернштейна равномерно сходится к $f(x)$ в интервале $[-1, 1]$.

Замечание 2. Если неравенство (9) имеет место лишь в интервале $[-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon]$, то сходимость равномерна в интервале $[-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon]$.

3°. Теорема 2. *Пусть матрица* (1) — *якобиева с параметрами* $-1 \leqslant \alpha < 0$, $-1 \leqslant \beta < 0$ *и функция* $f(x)$ *непрерывна в* $[-1, 1]$. *Тогда интерполяционный процесс С. Н. Бернштейна сходится в интервале* $[-1, 1]$ *равномерно к* $f(x)$. *Если матрица лежандрова, то сходимость равномерная в любом интервале вида* $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, $0 < \varepsilon < 1$.

Доказательство. Фейер [2] доказал, что для якобиевой матрицы с параметрами $-1 \leqslant \alpha < 0$, $-1 \leqslant \beta < 0$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |l_k^{(n)}(x)|^2 < \max\left[-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\beta}\right] = \gamma \quad (n=1, 2, \ldots), \tag{10}$$

где $x \in [-1, 1]$. Для лежандровой матрицы при $x \in [-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon]$

$$\sum_{k=1}^{n} [l_k^{(n)}(x)]^2 < \frac{2}{\varepsilon} \qquad (n=1, 2, \ldots). \tag{11}$$

В этой же работе Фейера доказывается, что из неравенств $\sum\limits_{k=1}^{n} [l_k^{(n)}(x)]^2 < C(\varepsilon)$ $(n=1, 2, \ldots)$, $x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, где ε — любое число из интервала $0 < \varepsilon < 1$ и $C(\varepsilon)$ зависит лишь от ε, следует, что $\Delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому из неравенств (10) и (11) следует, что для якобиевой матрицы с $-1 \leqslant \alpha \leqslant 0$, $-1 \leqslant \beta \leqslant 0$ $\Delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Проверим условие B. Рассмотрим функцию

$$F(x, y) = [n(n+\alpha+\beta+1) J_n^2(x, \alpha, \beta) + (1-x^2) J_n'^2(x, \alpha, \beta)] \frac{(y-x)^2}{1-x^2},$$

где $J_n(x, \alpha, \beta)$ — полином Якоби n-й степени, $-1 \leqslant \alpha \leqslant 0$, $-1 \leqslant \beta \leqslant 0$.

Имеет место следующая лемма.

Лемма. *При любом значении y_0 из интервала $[-1, 1]$ функция $F(x, y_0)$ — неубывающая при $y_0 < x < 1$ и невозрастающая при $-1 < x < y_0$.*

Из этой леммы следует, что условие B имеет место в каждой точке интервала $[-1, 1]$ для якобиевой матрицы с параметрами $-1 \leqslant \alpha \leqslant 0$, $-1 \leqslant \beta \leqslant 0$. Наконец, из условия B и неравенств (10) и (11) следует, что при $-1 \leqslant \alpha < 0$, $-1 \leqslant \beta < 0$ и $\sigma(x, x_k^{(n)}) = h$ имеет место* $|l_k^{(n)}(x)| < \sqrt{\gamma} / \sqrt{h}$, т. е. условие C имеет место в каждой точке $[-1, 1]$. Для лежандровой матрицы при $\sigma(x, x_k^{(n)}) = h$ имеет место $|l_k^{(n)}(x)| < \sqrt{2 / \varepsilon h}$, $x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Поэтому из замечаний 1 и 2 следует теорема 2.

Поступило
23 II 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Сообщ. Харьковск. матем. об-ва, сер. 4, **5**, 49 (1932).
[2] L. Fejer, Math. Ann., **106** (1932).

* Пользуясь асимптотическими формулами для полиномов Якоби, можно доказать, что при любых $-1 < \alpha$, $-1 < \beta$ и $x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ имеет место при $\sigma(x, x_k^{(n)}) = h$ $|l_k^{(n)}(x)| < C(\varepsilon) / h$.