Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 1

ФИЗИКА

В. Л. АВЕРБАХ и Б. В. МЕДВЕДЕВ

# К ТЕОРИИ КВАНТОВАННОГО ПРОСТРАНСТВА— ВРЕМЕНИ

*(Представлено академиком В. А. Фоком 12 XI 1948)*

§ 1. Введение. Целью настоящего сообщения является краткое изложение результатов исследования теории квантованного пространства, предложенной Снайдером (1).

Легко понять, что метод Снайдера состоит в рассмотрении группы движений гиперсферы в 5-пространстве, а указанный им произвол в выборе импульсов представляет собой хорошо известный произвол в выборе того или иного „расстояния“ в пространстве постоянной кривизны. Эта геометрическая интерпретация позволяет вычислить не только элемент объема, но и метрический тензор в импульсном мире и проливает свет на геометрический смысл встречающихся в теории величин. Заметим, что схема Снайдера получается однозначно, если наложить на операторы координат следующие три требования.

1. Эрмитовость относительно элемента объема $D(p_i p_i)\,(dp)_4$, где $D$ есть корень квадратный из детерминанта метрического тензора в $p$-мире.

2. Операторы координат и моментов должны образовывать группу.

3. Операторы координат однородны и первого порядка относительно производных по $p_i$ (латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3, 4; греческие — 1, 2, 3).

Из условия 3 и соображений тензорной симметрии следует, что операторы координат имеют вид:

$$x_i = i\hbar\,(\nu\delta_{ik} - \lambda p_i p_k)\,\frac{\partial}{\partial p_k}\,, \tag{1}$$

где $\nu$ и $\lambda$ — функции от $p_i p_i = \omega$. Из второго условия, вычисляя коммутаторы координат, находим:

$$2\,(\nu - \omega\lambda)\,\frac{d\nu}{d\omega} + \lambda\nu = -\,\frac{a^2}{\hbar^2} \tag{2}$$

($a$ — мировая постоянная, введенная Снайдером). Условие эрмитовости дает:

$$D(\omega) = \exp\left\{\int \frac{5\,\lambda + \omega\,\dfrac{d\lambda}{d\omega} - \dfrac{d\nu}{d\omega}}{2\,(\nu - \omega\lambda)}\,d\omega\right\}. \tag{3}$$

Таким образом, на три функции налагаются два условия. Остается одна степень свободы, отвечающая упомянутому выше радиальному преобразованию координат.

§ 2. Трансляционные свойства схемы Снайдера. Как известно, в обычной теории импульсы являются операторами смещения в пространстве координат. Легко видеть, что в схеме Снайдера это не имеет места. В самом деле, как известно [2], коммутаторы операторов смещения с операторами координат имеют вид

$$[x_i d_k] = i\hbar\delta_{ik}; \tag{4}$$

следовательно, для того чтобы импульсы были операторами смещения, необходимо, чтобы существовала такая система координат в $p$-мире, в которой $\nu = 1$, $\lambda = 0$, что невозможно в силу (2). Мы попытаемся поэтому ввести некие операторы $d_i$, которые будем называть операторами смещения в $x$-пространстве, требуя, чтобы они образовывали группу с операторами момента $M_{ik}$ и координат и имели векторный характер. Мы откажемся, далее, от требования 3 и будем считать $x_i$ и $d_i$ дифференциальными операторами, вообще говоря, бесконечно большого порядка, записанными в виде ряда по возрастающим порядкам дифференцирования. Назовем такую схему обобщенной схемой Снайдера (собственно схема Снайдера получается отсюда как частный случай). Можно показать, что в наших предположениях перестановочные соотношения имеют вид:

$$[x_i x_k] = \alpha M_{ik}, \quad [d_i d_k] = \beta M_{ik}, \quad [x_i d_k] = \gamma\delta_{ik} + \delta M_{ik},$$
$$[x_i M_{kl}] = -i\hbar(\delta_{ik}\delta_{ml} - \delta_{il}\delta_{mk})x_m, \quad [d_i M_{kl}] = -i\hbar(\delta_{ik}\delta_{ml} - \delta_{il}\delta_{mk})d_m \tag{5}$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ — некие константы; заметим, что если не коммутируют не только координаты, но и смещения по ним, то в теорию необходимо ввести две длины, так как из соображений размерности $\alpha \sim a_1^2/\hbar$, $\beta \sim \hbar/a_2^2$, а в силу принципа соответствия $a_1 \neq a_2$).

Учитывая известное тождество Якоби, можно показать, что эти правила перестановки противоречат друг другу, исключая случай $\alpha = \beta = \delta = 0$ (а также тривиальный и не удовлетворяющий принципу соответствия случай $d_i \sim x_i$).

Итак: нельзя обобщить схему Снайдера так, чтобы в $x$-пространстве появилась полная группа движений, не вводя иных операторов, кроме $d_i$, $x_i$, $M_{ik}$, и сохраняя некоммутативность координат. Т. е. схема с некоммутирующими координатами трансляционно неинвариантна в обычном смысле этого слова. В частности, как заметил Янг [3], трансляционно неинвариантна и собственно схема Снайдера.

§ 3. Случай коммутирующих координат. Можно показать, что вариант с коммутирующими координатами, предложенный С. Г. Крейном и Г. И. Кацом в рамках собственно схемы Снайдера, всегда может быть путем упомянутого выше радиального преобразования сведен к случаю $\nu = 1$, $\lambda = 0$, $D = 1$, т. е. он представляет собой просто введение неравномерного отсчета $p$-расстояний в обычной теории. (Обращение в нуль правой части выражения (2) оказывается условием разрешимости получающейся системы дифференциальных уравнений.)

В обобщенной схеме Снайдера операторы $d_i$ имеют в этом случае непрерывный спектр. Оператор $x_i$ в $d$-представлении оказывается дифференциальным. Пользуясь правилами перестановки (5), легко показать, что он должен иметь вид:

$$x_i = \mu d_i + i\hbar\frac{\partial}{\partial d_i} \tag{6}$$

($\mu$ и $D$ связаны условием эрмитовости). Как легко понять из дальнейшего, рассмотрение такой схемы самой по себе не сможет привести к чему-либо, отличному от обычной теории.

§ 4. Метод записи волновых уравнений в схеме Снайдера. Понятие производных по координатам в квантованном пространстве теряет смысл. Поскольку в обычной теории все уравнения можно записать, пользуясь вместо производных по координатам скобками Пуассона с соответствующим каноническим импульсом, кажется естественным сохранить такой способ записи и в схеме Снайдера. Как показано в ([5]), в этом случае уравнения в $p$-представлении имеют обычный вид, если только существует оператор $A_{k\omega}$, обладающий следующим свойством:

$$A_{k\omega}\chi(p) = f(\mathbf{p}, p_0;\ \mathbf{k}, \omega)\,\chi(p-k)$$

(обозначения те же, что и в ([5])). Снайдер не дает явного вида $A_{k\omega}$, однако легко убедиться, что требуемыми свойствами обладает оператор $e^{ik_iy_i}$, где величины $y_i$ обладают свойствами обычных координат:

$$[y_ip_k] = i\delta_{ik}, \qquad [y_iy_k] = 0 \tag{7}$$

(здесь и в дальнейшем $\hbar = c = 1$). Эрмитовы операторы $y_i$, как известно ([4]), могут быть записаны в виде:

$$y_i = iD^{-1/2}\frac{\partial}{\partial p_i}(D^{1/2}\ldots). \tag{8}$$

Собственная функция всех четырех операторов $y_i$ в $p$-представлении есть:

$$\psi_y(p) = \frac{1}{(2\pi)^2}D^{-1/2}e^{-ip_iy_i}. \tag{9}$$

Перейдем теперь к $y$-представлению. Легко видеть, что в нем все волновые уравнения выглядят так же, как и в координатном пространстве обычной теории. Поскольку, по предположению, изменение какой-либо величины $f$ со временем определяется скобкой Пуассона с $p_0$, а $i[p_0f] = \partial f/\partial y_0$ (см., например, ([2])), соотношениям непрерывности, автоматически получающимся из волновых уравнений, можно придать обычный физический смысл, который они имеют согласно $p$-представлению. Операторы координат в $y$-представлении имеют вид:

$$\begin{aligned}\hat{x}^i\psi(y_k') = &\iint (dy_i)(dp_i)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}(y_j'-y_j)p^j\right\}\nu(\omega)\,y_i\,\psi(y_i)\,\frac{1}{(2\pi\hbar)^4} - \\ &-\frac{\hbar^2}{2}\frac{1}{(2\pi\hbar)^4}\iint (dp_i)(dy_i)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}(y_j'-y_j)p^j\right\}[2\omega\lambda' - 5\lambda - 2\nu']\frac{\partial\psi(y_i)}{\partial y_i} + \\ &+\hbar^2\frac{1}{(2\pi\hbar)^4}\iint (dp_i)(dy_i)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}(y_j'-y_j)p^j\right\}\lambda\,y_l\,\frac{\partial^2\psi(y_i)}{\partial y_l\partial y_i},\end{aligned} \tag{10}$$

$$\lambda' = \frac{d\lambda}{d\omega}, \qquad \nu' = \frac{d\nu}{d\omega}.$$

В частности, при $\nu = 1$ (координаты Снайдера) имеем:

$$x_i = y_i - a^2y_k\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_k} - \frac{5a^2}{2}\frac{\partial}{\partial y_i}. \tag{11}$$

Таким образом, задача сводится к уже известной: надо решать обычные уравнения, которые, однако, имеют место не в координатном, а в некотором другом пространстве, которое удобно назвать „пространством волновых уравнений". Отличие от обычной теории состоит в том, что в $y$-пространстве частица отнюдь не является точечной. В самом деле, выражением точечности частицы в обычной теории является тот факт, что собственная функция оператора координат в пространстве волновых уравнений, совпадающем в этом случае с координатным, имеет вид $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$. В теории Снайдера может показаться, что вопрос о плотности заряда вообще лишен смысла, так как координаты не коммутируют. Однако, рассматривая задачу одного тела, взаимодействующего с полем, можно воспользоваться тем обстоятельством, что все четыре координаты могут одновременно обращаться в нуль, т. е. можно обнаружить частицу в начале координат в начальный момент времени. Это показывает, что и в схеме Снайдера частица остается точечной (в истинном координатном пространстве!). Соответствующая собственная функция всех четырех операторов координат есть просто константа $N$, определяющаяся из условий нормировки. В пространстве же волновых уравнений частица, благодаря кривизне $p$-мира, оказывается четырехмерно размазанной:

$$\psi_{x_0}(y)=\frac{N}{(2\pi)^2}\int e^{ip_iy_i}D^{1/2}(p)\,(dp)_4. \tag{12}$$

При $a\to 0$ $\psi_{x_0}(y)$ переходит в $\delta(\mathbf{r})\,\delta(t)$.

Чтобы учесть неточечность заряда при взаимодействии его с полем, надо в правила перестановки компонент поля ввести формфактор $B(\mathbf{k})\,B^*(\mathbf{k})$; $B(\mathbf{k})$ определяется из условия (см. ([6])):

$$\rho=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\cos\mathbf{kr}\,B(\mathbf{k})\,(dk)_3, \tag{13}$$

где $\rho$ есть плотность заряда в том состоянии, где его координаты диагональны. Заметим, что, как и в обычной теории, квадрат модуля величины (12) еще не дает $\rho$. Он определяет, грубо говоря, „плотность мгновенно существующей частицы". В обычной теории $\rho$ получается отсюда интегрированием по времени. В схеме Снайдера эта процедура бессмысленна. Единственный выход, который представляется сколько-нибудь разумным,— это проделать в $p$-представлении то же, что происходит там в обычной теории при интегрировании по времени (это сводится к интегрированию по $y_0$ вместо $t$). Оправданием этой процедуры может служить выполнение принципа соответствия при $a\to 0$. Тогда легко видеть, что:

$$B(\mathbf{k})=\frac{N^2}{2\pi}\int D^{1/2}(\mathbf{p},\,p_0)\,D^{1/2}(\mathbf{p}+\mathbf{k},\ p_0)\,(dp)_4. \tag{14}$$

В частности, при $\nu=1$, $\lambda=-a^2$:

$$B(\mathbf{k})=\frac{3a^4}{4\pi^3}\int(a^2p_ip_i+1)^{-5/4}\,[a^2(p_\alpha+k_\alpha)^2-a^2p_0^2+1]^{-5/4}\,(dp)_4. \tag{15}$$

Как видно из формулы (14), теория неинвариантна относительно того или иного выбора функции $D(\omega)$, что представляется нам ее наиболее существенным недостатком.

В заключение мы хотели бы выразить глубокую благодарность А. С. Компанейцу и Е. И. Тамму за весьма интересное и полезное для нас обсуждение результатов. Мы очень признательны также Н. Н. Боголюбову за разъяснение некоторых вопросов теории Снайдера.

Поступило
23 VIII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Snyder, Phys. Rev., **71**, 38 (1947). [2] П. А. М. Дирак, Основы квантовой механики, М.— Л., 1932. [3] C. Jang, Phys. Rev., **72**, 874 (L.) (1947). [4] В. Паули, Общие принципы волновой механики, М. — Л., 1947. [5] H. Snyder, Phys. Rev., **72**, 68 (1947). [6] М. А. Марков, ЖЭТФ, **16**, 790 (1947).