Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 1

ГИДРОМЕХАНИКА

К. П. СТАНЮКОВИЧ

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ПЛОСКИЕ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 10 XI 1948)

Уравнения установившихся осесимметричных течений могут быть написаны в виде:

$$
\begin{gathered}
u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}-\frac{v^2}{r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=0,\\
u\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{uv}{r}+\frac{1}{r\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta}=0,\\
r\frac{\partial}{\partial r}(\rho u)+\rho u+\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v)+\rho(u+v\operatorname{ctg}\theta)=0,\\
ru\frac{\partial s}{\partial r}+v\frac{\partial s}{\partial \theta}=0.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Здесь r — радиус-вектор; θ — угол между какой-либо осью (совпадающей с невозмущенным движением газа) и радиусом-вектором; u — проекция скорости на r; v — проекция скорости на перпендикуляр к r; ρ — плотность; p — давление; $s=p\rho^{-k}$ — величина, характеризующая энтропию газа. Член $u+v\operatorname{ctg}\theta$ характеризует осесимметричность потока, в случае плоского потока этот член исчезает.

Введем величину $w=p/\rho$, тогда система (1) примет вид:

$$
\begin{gathered}
ruu'_r+vu'_\theta-v^2+rw'_r+rw\frac{\rho'_r}{\rho}=0,\\
ruv'_r+vv'_\theta+uv+w'_\theta+w\frac{\rho'_\theta}{\rho}=0,\\
ru'_r+u+v'_\theta+ru\frac{\rho'_r}{\rho}+v\frac{\rho'_\theta}{\rho}+u+v\operatorname{ctg}\theta=0,\\
ru\frac{w'_r}{w}+v\frac{w'_\theta}{w}=(k-1)\left[ru\frac{\rho'_r}{\rho}+v\frac{\rho'_\theta}{\rho}\right].
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Введем:

$$
u=r^{a_1}x_1,\quad v=r^{a_1}x_2,\quad w=r^{2a_1}y,\quad \rho=r^{a_2}\eta,
\tag{3}
$$

где x_1, x_2, y, η — функции одной независимой переменной,

$$
z=r^{a_3}e^{\theta}.
\tag{4}
$$

В результате придем к системе уравнений, описывающей автомодельные установившиеся движения газа:

$$a_1 x_1^2 + a_3 x_1 x_1' + x_2 x_1' - x_2^2 + \left(2a_1 + a_2 + a_2 \frac{\eta'}{\eta}\right) y + a_3 y' = 0,$$

$$(1 + a_1) x_1 x_2 + a_3 x_1 x_2' + x_2 x_1' + y \frac{\eta'}{\eta} + y' = 0, \tag{5}$$

$$x_1 (1 + a_1 + a_2) + a_3 x_1' + x_2' + \frac{\eta'}{\eta} (a_3 x_1 + x_2) + x_1 + x_2 \operatorname{ctg} \theta = 0,$$

$$\frac{y'}{y} (a_3 x_1 + x_2) + (2 - k) a_2 x_1 = (k - 1) \frac{\eta'}{\eta} (a_3 x_1 + x_2).$$

Здесь, например, $x_1' = dx_1 / d \ln z$.

В случае $a_3 = 0$ $z = e^\theta$, и система (5) имеет решения в предполагаемом „автомодельном“ виде.

Если $a_3 \neq 0$, то искомые решения могут иметь место лишь для плоских движений газа, когда исчезает член $x_1 + x_2 \operatorname{ctg} \theta$, поскольку в противном случае θ явно входит в уравнения, решения которых, согласно гипотезе, не должны зависеть от θ.

Исследуем сначала случай $a_3 = 0$.

При этом, если исключить η' / η, то система (5) может быть приведена к виду:

$$a_1 x_1^2 + x_2 x_1' - x_2^2 + (2a_1 + a_2) y = 0,$$

$$(1 + a_1) x_1 x_2 + x_2 x_2' + \frac{k y'}{k - 1} + \frac{2 - k}{k - 1} a_2 y \frac{x_1}{x_2} = 0, \tag{6}$$

$$\left(1 + a_1 + \frac{a_2}{k - 1}\right) x_1 + x_2' + \frac{x_2}{k - 1} \frac{y'}{y} + x_1 + x_2 \operatorname{ctg} \theta = 0.$$

Здесь, например, $x_1' = dx_1 / d\theta$.

Отсюда легко находится решение Буземана (1), являющееся обобщением решения Прандля — Майера (2).

Положим, что $a_1 = a_2 = 0$. Тогда все параметры u, v, p, ρ являются функциями лишь полярного угла θ и уравнения (6) примут вид:

первое уравнение дает:

$$u' = v; \tag{7}$$

второе соотношение является уравнением Бернулли и дает:

$$u^2 + v^2 + \frac{2kw}{k - 1} = A^2 = \mathrm{const}; \tag{8}$$

третье из уравнений после преобразования принимает вид:

$$(u + u'') \left[\frac{2}{k - 1} \frac{u'^2}{A^2 - (u^2 + u'^2)} - 1\right] = u + u' \operatorname{ctg} \theta, \tag{9}$$

Нетрудно убедиться в том, что для этих движений $s = \mathrm{const}$. В случае плоских движений член $u + u' \operatorname{ctg} \theta$ исчезает, и мы приходим к решению Прандтля — Майера:

$$u' = \sqrt{\frac{k - 1}{k + 1} (A^2 - u^2)}. \tag{10}$$

В общем случае для автомодельных плоских движений (когда $a_3 \neq 0$) мы будем иметь, исходя из уравнений (5), соотношения (исключая η' / η):

$$a_1 x_1^2 + a_3 x_1 x_1' + x_2 x_1' - x_2^2 + \frac{k}{k - 1} a_3 y' +$$

$$+ \left(2a_1 + a_2 + a_2 a_3 \frac{2 - k}{k - 1} \frac{x_1}{a_3 x_1 + x_2}\right) y = 0,$$

$$(1+a_1)x_1x_2+a_3x_1x_2'+x_2x_2'+\frac{ky'}{k-1}+\frac{2-k}{k-1}a_2\frac{x_1y}{a_3x_1+x_2}=0, \quad (11)$$

$$x_1\left(1+a_1+\frac{a_2}{k-1}\right)+a_3x_1'+x_2'+\frac{a_3x_1+x_2}{k-1}\frac{y'}{y}=0.$$

Очевидно, что задача сначала может быть сведена к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям 1-го порядка, а затем даже к одному уравнению 1-го порядка (поскольку уравнения однородны). Эти уравнения имеют вид:

$$-\frac{d\ln z}{dx_1}=\frac{a_3x_1+x_2+\dfrac{ka_3y'}{k-1}}{a_1x_1^2-x_1^2+y\left[2a_1+a_2+\dfrac{2-k}{k-1}\dfrac{a_2a_3x_1}{a_2x_1+x_2}\right]}=$$

$$=\frac{(a_3x_1+x_2)x_2'+\dfrac{ky'}{k-1}}{(1+a_1)x_1x_2+\dfrac{2-k}{k-1}\dfrac{a_2x_1y}{a_3x_1+x_2}}=\frac{a_3+x_2'+\dfrac{a_3x_1+x_2}{k-1}\dfrac{y'}{y}}{x_1\left(1+a_1+\dfrac{a_2}{k-1}\right)}, \quad (12)$$

где $x_2'=dx_2/dx_1$, $y'=dy/dx_1$.

Введем $x_2=\xi x_1$, $y=\eta x_1^2$; уравнения (12) при этом примут вид:

$$\frac{d\ln x_1}{d\xi}=\frac{M_1}{N_1}=\frac{M_2}{N_2}, \quad (13)$$

где

$$M_1=\left[a_1-\xi^2+\eta\left(2a_1+a_2+\frac{2-k}{k-1}\frac{a_2a_3x_1}{a_3x_1+x_2}\right)\right]\left[1+\frac{a_3+\xi}{(k+1)\eta}\frac{d\eta}{d\xi}\right]-$$

$$-\frac{ka_3}{k-1}\frac{d\eta}{d\xi}\left(1+a_1+\frac{a_2}{k-1}\right);$$

$$N_1=\left(1+a_1+\frac{a_1}{k-1}\right)\left(a_3+\xi+\frac{2ka_3\eta}{k-1}\right)-$$

$$-\frac{k+1}{k-1}(a_3+\xi)\left[a_1-\xi^2+\eta\left(2a_1+a_2+\frac{2-k}{k-1}\frac{a_2a_3x_1}{a_3x_1+x_2}\right)\right];$$

$$M_2=\left[1+a_1)\xi+\frac{2-k}{k-1}\frac{a_2\eta}{a_3+\xi}\right]\left(1+\frac{a_3+\xi}{(k-1)\eta}\frac{d\eta}{d\xi}\right)-$$

$$-\left(1+a_1+\frac{a_2}{k-1}\right)\left(a_3+\xi+\frac{k}{k-1}\frac{d\eta}{d\xi}\right);$$

$$N_2=\left(1+a_1+\frac{a_2}{k-1}\right)\left[(a_3+\xi)\xi+\frac{2k\eta}{k-1}\right]-$$

$$-\frac{k+1}{k-1}(a_3+\xi)\left[(1+a_1)\xi+\frac{2-k}{k-1}\eta\frac{a_2}{a_3+\xi}\right].$$

Решая (13), находим $\eta=\eta(\xi)$, $x_1=x_1(\xi)$; далее определяем $x_2=x_2(x_1)$ и $y=y(x_1)$, а уже затем $z=z(x_1)$.

В случае безвихревых течений: $\dfrac{\partial u}{\partial\theta}=r\dfrac{\partial v}{\partial r}+v$, что дает для автомодельных движений:

$$\frac{dx_1}{d\ln z}=a_3\frac{dx_2}{d\ln z}+x_2(1+a_1). \quad (14)$$

Для осесимметричных движений ($a_3 = 0$), решая совместно уравнение (14) и уравнения (6), найдем, что безвихревые течения возможны лишь при $a_1 = a_2 = 0$, таким образом, решение Буземана является единственным „автомодельным“, безвихревым решением.

Тот же результат имеет место и для плоских движений (в случае безвихревых течений). Сравнивая в первом и втором уравнениях (11) коэффициенты при y и y', найдем, что $2a_1 + a_2 = 0$.

При этом должно быть:

$$a_1 x_1^2 + a_3 x_1 x_1' + x_2 x_1' - x_2^2 = a_3 (1 + a_1) x_1 x_2 + a_3 x_2 x_2' (a_3 + 1).$$

Заменяя

$$x_1' = a_3 x_1' + (1 + a_1) x_2,$$

придем к результату:

$$a_1 (x_1^2 + x_2^2) = 0,$$

откуда следует, что $a_1 = 0$ и $a_2 = 0$.

Таким образом, безвихревые плоские течения определяются уравнениями:

$$-\frac{d \ln u}{d\xi} = \frac{\xi^2 \left(1 + \frac{a_3 + \xi}{(k-1)\eta} \frac{d\eta}{d\xi}\right) + \frac{k a_3}{k-1} \frac{d\eta}{d\xi}}{a_3 + \xi + \frac{2k a_3}{k-1}\eta + \frac{k+1}{k-1}\xi^2 (a_3 + \xi)} = \frac{\xi + \frac{k}{k-1}\frac{d\eta}{d\xi}}{1 + \xi^2 + \frac{2k}{k-1}\eta} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d \ln \left(1 + \xi^2 + \frac{2k\eta}{k-1}\right)}{d\xi}, \qquad (15)$$

$$-\frac{d \ln z}{du} = \frac{1}{u}\left(a_3 + \frac{dv}{du} + \frac{a_3 u + v}{(k-1) w} \frac{dw}{du}\right).$$

В случае вихревых течений при $s = \text{const}$, исходя из уравнения Бернулли, можно притти к результату, что:

$$x_1^2 + x_2^2 + \frac{2ky}{k-1} = \frac{A}{r^{2a_1}} = \text{const}. \qquad (16)$$

Отсюда ясно, что для данной линии тока $r = \text{const}$.

В заключение отметим, что в самом общем случае установившихся пространственных движений, зависящих от 3 независимых параметров (функций), не существует автомодельных движений, зависящих от одного параметра, можно лишь найти движения, зависящие от двух независимых параметров.

Например, если написать уравнения газовой динамики в сферических координатах, то, вводя:

$$u_r = r^{a_1} x_1(\varphi;\theta), \quad u_\varphi = r^{a_1} x_2(\varphi;\theta), \quad u_\theta = r^{a_1} x_3(\varphi;\theta),$$
$$w = r^{2a_1}\, y(\varphi;\theta), \quad \rho = r^{a_2} \eta(\varphi;\theta),$$

мы придем к решениям, зависящим от двух параметров φ и θ.

Поступило
10 XI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Busemann, Z. f. ang. Math. u. Mech., **9** (1929). [2] Meyer, Диссертация, Геттинген, 1908.