Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 1

МАТЕМАТИКА

Д. МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОЙ

О ГИПЕРТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЯХ И ГИПЕРТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЧИСЛАХ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 5 XI 1948)

§ 1. Под гипералгебраической функцией мы разумеем функцию, определяемую алгебраическим дифференциальным уравнением

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

причем для полной определенности мы должны поставить начальное условие:

$$\text{при } x = a\colon \quad y = b,\ y' = b_1, \ldots, y^{(n-1)} = b_{n-1}. \tag{2}$$

Тогда гипертрансцендентными функциями будут функции, не определяемые уравнением (1).

Аналогами в теории чисел являются гипералгебраические числа — значение y при $x = c$ (алгебраическом), удовлетворяющем уравнению (1) с алгебраическими коэффициентами при начальных условиях (2), где b_i тоже алгебраические числа. Таковы e^{α}, $\lg \alpha$ при α алгебраическом числе. Мы можем установить теоретико-множественными соображениями существование таких чисел по образцу установления существования трансцендентных чисел.

§ 2. А именно, в то время как множество функций имеет мощность выше мощности континуума, множество функций гипералгебраических образует континуум.

Уравнение (1) характеризуем числом (весом) $N = n + \mu$, где n — порядок уравнения, μ — степень.

Мы получаем, полагая $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\mu = 1, 2, 3, \ldots$, счетное множество уравнений с неопределенными коэффициентами, а так как для каждой пары значений $(n + \mu)$ будет определенное конечное число коэффициентов и для каждого уравнения конечное число решений y, то получаем счетное множество функций y при неопределенных коэффициентах уравнения (1) и начальных данных b_i. Из этого множества, по выключении повторяющихся y, получим опять счетное множество.

Если мы теперь будем придавать коэффициентам и начальным данным b_i различные определенные значения, то, учитывая, что для каждого коэффициента и b_i возможные значения образуют континуум, мы получим континуум гипералгебраических функций.

§ 3. Аналогичным образом доказывается существование гипертрансцендентных чисел. Различие оказывается только в том, что в то время как все числа образуют континуум, мы получим в настоящем случае счетное множество уравнений (1) с неопределенными целыми (или вообще алгебраическими) коэффициентами. Мы получаем также счетное множество гиперaлгебраических чисел, в то время как все числа образуют континуум.

§ 4. Из гипералгебраических функций выделяем такие, для которых коэффициенты (1) и начальные данные являются алгебраическими. Это будут алгебраически-гипералгебраические функции.

Существование алгебраических трансцендентных функций устанавливается аналогично тому, как в §§ 2, 3 установлено существование общих гипертрансцендентных функций и чисел. Множество их счетное, откуда следует, что не все гипералгебраические функции являются алгебраически-гипералгебраическими.

Можно доказать, что, определяя алгебраически гипералгебраическую функцию, мы можем брать коэффициенты f и b_l рациональными и даже целыми числами.

§ 5. Возможно эффективное построение алгебраически-гипералгебраической функции. Разложение

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \qquad (3)$$

может определять алгебраически-гипералгебраическую функцию при b_l алгебраических только в том случае, если a_n являются рациональными функциями с целыми коэффициентами t, где t определяется уравнением степени μ, не зависящей от n, так что для степеней неприводимых уравнений, определяющих a_n, существует высшая граница, не зависящая от n.

В простейшем случае, когда для уравнения (1) при $x = 0$ $\dfrac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \neq 0$, мы получаем $y^{(n+1)}, y^{(n+2)}, \dots$ рационально в $y, y', \dots, y^{(n)}$, а $y^{(n)}$ определяемым уравнением степени не выше n, и предложение таким образом доказано. Дело обстоит сложней в исключительном случае, когда $\left[\dfrac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right]_{x=0} = 0$. Этот случай был исследован мной и Какейя [2], которые доказали, что после определенного числа дифференцирований данного дифференциального уравнения получаем при каждом дифференцировании уравнения при $x = 0$ с коэффициентами $\omega(0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(k-1)})$ при старших производных отличными от нуля.

Таким образом, $y_0^{(n)}, y_0^{(n+1)}, \dots, y_0^{(k-1)}$ могут определяться уравнениями степеней $m_n, m_{n+1}, \dots, m_{k-1}$ и представлять рациональные функции t, определяемого уравнением степени не высшей m_n, $m_{n+1}, \dots, m_{k-1}$, а $y_0^{(k)}, y_0^{(k+1)}, \dots,$ выражающиеся рационально в $y_0^{(n)}, \dots, y_0^{(k-1)}$, выразятся также рационально в t, определяемом неприводимым уравнением ограниченной степени.

Мы в состоянии теперь эффективно построить степенные разложения, выражающие алгебраически-гипертрансцендентные функции:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 \sqrt{n_2}\, x^2 + a_3 \sqrt[3]{n_3}\, x^3 + \dots, \qquad (4)$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots$ — рациональные числа, $n_1, n_2, \dots$ — числа целые, но такие, что в n_l входит хотя бы один простой множитель в первой степени.

§ 6. Мы взяли уравнения, определяющие первообразные корни возрастающих степеней, но выбор гораздо шире, возможно построение неприводимого уравнения сколь угодно высокой степени, на основании теоремы Эйзенштейна или ее обобщений Нетто и Кенигсбергера.

Согласно Эйзенштейну, уравнение

$$a_0x^p + a_1x^{p-1} + \ldots + a_{p-1}x + a_p = 0 \tag{5}$$

неприводимо, если целые числа a_j таковы, что a_0 не делится на простое число q; $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ делятся на q, а a_n не делится на q^2.

Вместо $\sqrt[p]{n^p}$ в разложении (3) можем брать корни последовательности уравнений (4), удовлетворяющих условиям Эйзенштейна. В дальнейшем такие уравнения будут нами исследованы, причем мы поставим еще условие, чтобы $\frac{a_j}{a_0}$ и $\frac{a_j}{a_p}$ бесконечно убывали с возрастанием p, что, конечно, всегда возможно.

§ 7. Мы укажем теперь на явление, аналогичное отмеченному Штеккелем для целой трансцендентной функции. Штеккель строит целую трансцендентную функцию, выражаемую степенным разложением, принимающую при всех алгебраических значениях переменного x только алгебраические значения. Такой функцией является:

$$y = f(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} u_\nu x^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} \varphi_\nu(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} u_\nu C_{\nu,\alpha} x^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)+\alpha}, \tag{6}$$

$$\varphi_\nu(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{\nu-1}).$$

В группах членов с $x^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)}$ и $x^{\frac{1}{2}(\nu+1)(\nu+2)}$ не будет общих членов.

Разложение (6) будет сходиться, если, обозначив через a_ν сумму всех групп до $x^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)}$, частное значение возьмем так, что

$$|y_\nu - a_\nu| \frac{C_{\nu,\alpha}\left[\frac{1}{2}\nu(\nu+1)+\alpha\right]!}{x_\nu^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)}[(x_\nu - x_1)\ldots(x_\nu - x_{\nu-1})]} < 1;$$

u_ν определяется из условия, что при $x = x_\nu, \ldots, y = y_\nu$ мы получаем $u_0 = y_0$, $u_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1(x_1 - x_0)}$; вообще,

$$u_\nu = \sum_{j=1}^{j=\nu} \theta_j^{(\nu)}(y_j - y_0), \tag{7}$$

где $\theta_j^{(\nu)}$ — рациональные функции $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\nu$.

Функция y представляет в случае удовлетворения дифференциальному уравнению (1) алгебраически-гипер알гебраическую функцию, а в случае неудовлетворения — алгебраически-гипертрансцендентную. В самом деле, при $x = 0$ $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ будут алгебраическими числами.

§ 8. Вместо того, чтобы, как это делает Штеккель, непосредственно устанавливать соответствие между членами счетного множества

$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots$, расположенного в известном порядке, со значениями $y_0, y_1, \ldots, y_\nu, \ldots$, мы приводим в соответствие множество $\{x\}$ и множество $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_\nu, \ldots$

Подбор u_ν совершается так: каждому x_j приводится в соответствие неприводимое уравнение степени j, так что степень неприводимых уравнений, определяющих u_j, будет расти вместе с j и при этом, согласно § 6, разложение (6) даст гипертрансцендентную функцию; что касается y_ν, то они определяются уравнением (7) и будут, как u_ν, алгебраическими числами.

§ 9. Но мы можем учесть условие сходимости § 6, т. е. брать так неприводимое уравнение, чтобы его корень был таков, при котором выполнены ограничения для $|y_j - a_j| < \varepsilon$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, что будет при u_ν, достаточно близком к его значению, отвечающему $u_j = a_j$.

Но это всегда достижимо. Коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_{\mu-1}$ в сравнении с a_0, a_μ мы можем сделать настолько малыми, что корень x, определяемый уравнением $\sum\limits_j a_j u^{\mu-j} = 0$, будет сколько угодно близким к $\sqrt[\mu]{-\frac{a_\mu}{a_i}} = \beta$, так что $|u - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$, где ε — заданная величина.

Но β можно брать так, что $|\beta - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$, и $|u - \alpha|$ окажется меньше ε.

Поступило
29 VI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Stäckel, Math. Ann. (1895); Acta Math., 25 (1902). [2] Kakeya, The Science Reports of the Tohoku Imp. Univ., ser. 1, 4, No 1, p. 6. [3] Д. Мордухай-Болтовской, Сообщ. Харьковск. матем. об-ва (1910). [4] Д. Мордухай-Болтовской, Варшавск. универс. изв. (1913). [5] Nielsen, Handb. der Theorie der Gammafunctionen. Leipzig 1905. [6] Netto, Vorlesungen über Algebra. Leipzig. 1896; Math. Ann., 48 (1896). [7] Д. Мордухай-Болтовской, The Tohoku Math. J., 35, part 1, S. 19—34 (1932). [8] L. Königsberger, Crelle's J., 115, 53 (1895).