Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 1

МАТЕМАТИКА

Л. Г. МАГНАРАДЗЕ

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 3 XI 1948)

1. Пусть D^+ — конечная открытая плоская область, ограниченная одной простой замкнутой гладкой линией L. Через D^- обозначим бесконечную часть плоскости, дополняющую множество $D^+ + L$ до полной плоскости.

Поставим следующую граничную задачу.

Найти аналитические векторы: $\varphi^+(z) = (\varphi_1^+(z), \ldots, \varphi_n^+(z))$, голоморфный в области D^+, и $\varphi^-(z) = (\varphi_1^-(z), \ldots, \varphi_n^-(z))$, голоморфный в области D^- и имеющий конечный порядок на бесконечности, по граничному условию

$$\varphi^-(t) = C(t)\varphi^+(t), \qquad t \text{ на } L, \tag{1}$$

где $C(t) = (c_{\alpha\beta}(t))$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$ — матрица, заданная на L и удовлетворяющая условию $\det C(t) \neq 0$ на L.

В статье [1] мы решили эту задачу при условии, что $n = 1$, а непрерывная $C(t)$ удовлетворяет условию

$$\omega(\tau; C) = o\left(1 / \log^p \frac{1}{\tau}\right) \text{ при любом } p \geqslant 0, \tag{2}$$

где

$$\omega(\tau; C) = \max_{|s_2 - s_1| \leqslant \tau} |C(t_2) - C(t_1)|, \quad 0 < \tau \leqslant l,$$

s_1 и s_2 — дуговые абсциссы точек t_1 и t_2, отсчитанные от некоторой фиксированной точки линии L, а l — длина всей линии.

Мы не указываем здесь исследований других авторов, так как об этом довольно подробно сказано в статье [1].

Цель настоящей заметки — исследовать задачу (1) при условии, что $c_{\alpha\beta}(t)$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют условию (2) всюду на L, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, в односторонних окрестностях которых они удовлетворяют условию

$$\omega(\tau; c_{\alpha\beta}) = O(\tau^\mu) \quad \text{при } \sigma < \mu \leqslant 1, \tag{3}$$

где σ — некоторое неотрицательное число, определяемое ниже.

2. В том частном случае, когда функции удовлетворяют условию Липшица — Гельдера, задача (1) была решена Племели *.

Для обобщения его результатов на случай, когда функции $c_{\alpha\beta}(t)$ удовлетворяют условию (2), рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{C(t)-C(t_0)}{t-t_0} C^{-1}(t)\varphi(t)\,dt = f(t_0), \tag{4}$$

где $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))$, а $f_\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, являются некоторыми полиномами. Как известно ([2]), возможность решения граничной задачи (1) существенно зависит от разрешимости интегрального уравнения (4).

Нетрудно показать, что если $c_{\alpha\beta}(t)$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют условию (2), тогда интегральный оператор, стоящий в левой части равенства (4), является вполне непрерывным. Далее, пользуясь результатами, полученными нами в работе ([4]), можно показать, что всякое непрерывное решение уравнения (4) удовлетворяет условию (2).

После этих замечаний нетрудно показать, что все свойства решений граничной задачи (1), установленные в случае, когда функции $c_{\alpha\beta}(t)$ удовлетворяют условию Липшица — Гельдера, остаются в силе и при более общих условиях (2).

3. Пусть теперь функции $c_{\alpha\beta}(t)$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$ имеют конечное число точек разрыва первого рода: $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

В предположении, что $c_{\alpha\beta}(t)$ кусочно постоянны, задача (1) была исследована Племели ([2]). При условии, что функции $c_{\alpha\beta}(t)$ кусочно удовлетворяют условию Липшица — Гельдера, задача (1) была решена Ф. Д. Гаховым ([5]) при $n=1$ и Н. П. Векуа ([6]) при $n>1$. Последние строят решение в классе функций, имеющих в окрестности точки разрыва a_k оценку вида $O(1/|z-a_k|^{\mu_k})$, где $0 \leqslant \mu_k < 1$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Мы строим решение задачи (1) в том же классе, однако при более общих граничных условиях. При этом наш способ изложения несколько отличен от способов, предложенных в работах ([2], [6]).

4. Рассмотрим матрицу $\Gamma_k = C^{-1}(a_k - 0)\,C(a_k + 0)$ и соответствующее характеристическое уравнение $\det(\Gamma_k - \lambda E) = 0$, где E — единичная матрица. Так как по условию $\det \Gamma_k \neq 0$, то все корни этого уравнения отличны от нуля. Обозначим их через $\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \ldots, \lambda_n^{(k)}$ и положим $\lambda_\alpha^{(k)} = e^{2\pi i \rho_\alpha^{(k)}}$, где $\rho_\alpha^{(k)} = \sigma_\alpha^{(k)} + i\tau_\alpha^{(k)}$ определены с точностью до целых слагаемых.

В дальнейшем будем считать, что $0 \leqslant \sigma_\alpha^{(k)} < 1$ и в условии (3) под σ будем подразумевать $\max(\sigma_1^{(1)}, \sigma_2^{(1)}, \ldots, \sigma_n^{(m)})$. Кроме того, для простоты вместо α_1, Γ_1, $\lambda_\alpha^{(1)}$ и $\rho_\alpha^{(1)}$ будем писать, соответственно, α, Γ, λ_α и ρ_α.

Как хорошо известно, существуют матрицы B, $\det B \neq 0$, и целые положительные числа $n_1, n_2, \ldots, n_r$ такие, что $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$ и $B^{-1}\Gamma B = G$, где G — квази-диагональная матрица вида $[G_{n_1}(\lambda_1), \ldots, G_{n_r}(\lambda_r)]$, причем $G_p(\lambda) = (g_{\alpha\beta}^{(p)})$, $g_{\alpha\beta}^{(p)} = \lambda$ при $\beta = \alpha$ и $\beta = \alpha + 1$ и $g_{\alpha\beta}^{(p)} = 0$ в остальных случаях, а $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, $p = n_1, n_2, \ldots, n$ и $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, p$. Далее, положим $A = C(a - 0)\,B$.

---

* См. также работу ([3]), в которой дано изложение основных результатов Племели с некоторыми упрощениями и дополнениями, имеющими важные применения в теории систем сингулярных интегральных уравнений.

Пусть a_0 — произвольная точка линии L, отличная от точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Положим

$$u = u(z) = \frac{1}{2\pi i}\log\left(\frac{z-a}{z-a_0}\right), \quad \omega_\alpha(z) = \left(\frac{z-a}{z-a_0}\right)^{\rho_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n.$$

При этом пусть $u(t^-) = u(t^+)$ и $\omega_\alpha(t^-) = \omega_\alpha(t^+)$, если $t \in \breve{a_0 a}$, $u(t^-) = u(t^+) + 1$ и $\omega_\alpha(t^-) = \lambda_\alpha \omega_\alpha(t^+)$, если $t \in \breve{a a_0}$.

Введем квази-диагональные матрицы: $U(z) = [U_{n_1}(z), \ldots, U_{n_r}(z)]$, $\Omega(z) = [\Omega_{n_1}(z), \ldots, \Omega_{n_r}(z)]$ и $\Lambda = [\Lambda_{n_1}, \ldots, \Lambda_{n_r}]$, где $U_p(z) = (u^{(p)}_{\alpha\beta})$, $u^{(p)}_{\alpha\beta} = C_u^{\beta-\alpha}$, если $\beta \geqslant \alpha$, и $u^{(p)}_{\alpha\beta} = 0$, если $\beta < \alpha$, причем $C_u^\nu = u(u-1)\ldots$ $\ldots(u-\nu+1)/\nu!$, а $\Omega_p(z) = [\omega(z), \ldots, \omega(z)]$ и $\Lambda_p = [\lambda, \ldots, \lambda]$ — диагональные матрицы порядка p, причем $\omega(z) = \omega_1(z), \ldots, \omega_r(z)$, $\lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ и $p = n_1, \ldots, n_r$.

Легко проверить, что $U_p(t^-) = U_p(t^+)$ и $\Omega_p(t^-) = \Omega_p(t^+)$, если $t \in \breve{a_0 a}$; $U_p(t^-) = G_p(1)\ U_p(t^+)$ и $\Omega_p(t^-) = \Lambda_p \Omega_p(t^+)$ если $t \in a a_0$.

Полагая $\varphi^+(z) = AU(z)\Omega(z)\psi_0^+(z)$ и $\varphi^-(z) = BU(z)\Omega(z)\psi_0^-(z)$, граничное условие (1) можно переписать так:

$$\psi_0^-(t) = H_0(t)\psi_0^+(t),$$

где

$$H_0(t) = \Omega^{-1}(t)U^{-1}(t)A^{-1}C(t)BU(t)\Omega(t).$$

Нетрудно показать, что матрица $H_0(t) = (h^{(0)}_{\alpha\beta}(t))$ удовлетворяет условию $\det H_0(t) \neq 0$ на L, а $h^{(0)}_{\alpha\beta}(t)$ удовлетворяют условию (2) всюду на L, за исключением $a_0, a_2, \ldots, a_m$, и условию (3) в односторонних окрестностях точек $a_2, a_3, \ldots, a_m$.

Точку разрыва a_0 легко устранить, если ввести еще одно простое преобразование $\psi_0^+(z) = \Omega_\infty(z)U_\infty(z)\psi_1^+(z)$ и $\psi_0^-(z) = \Omega_0(z)U_0(z)\psi_1^-(z)$, где $\Omega_\infty(z)$ и $U_\infty(z)$ получаются из матриц $\Omega(z)$ и $U(z)$, если в них $\omega_\alpha(z)$ и $u(z)$ заменить, соответственно, функциями $(z-a_0)^{\rho_\alpha}$ и $\log(z-a_0)$, а $\Omega_0(z)$ и $U_0(z)$ получаются из матриц $\Omega(z)$ и $U(z)$, если в последних точку a заменить через произвольную точку z_0 области D^+, а $\omega_\alpha(z)$ и $u(z)$ заменить, соответственно, через $1/\omega_\alpha(z)$ и $-u(z)$. Введенные таким образом функции являются однозначными на всей плоскости, разрезанной вдоль простой непрерывной линии, соединяющей точки z_0, a_0 и ∞.

Таким образом приходим к новому граничному условию $\psi_1^-(t) = H_1(t)\psi_1^+(t)$, где $H_1(t) = U_0^{-1}(t)\Omega_0^{-1}(t)H_0(t)\Omega_\infty(t)U_\infty(t)$.

Нетрудно показать, что матрица $H_1(t) = (h^{(1)}_{\alpha\beta}(t))$ удовлетворяет условию $\det H_1(t) \neq 0$ на L, а $h^{(1)}_{\alpha\beta}(t)$ удовлетворяют условию (2) всюду на L, за исключением, быть может, точек $a_2, a_3, \ldots, a_m$, и условию (3) в односторонних окрестностях этих точек.

Кроме того, в силу непрерывности матриц $\Omega(t)$, $\Omega_0(t)$, $\Omega_\infty(t)$ и $U(t)$, $U_0(t)$, $U_\infty(t)$ в точке a_2, характеристическое уравнение матрицы $H_1(t)$, соответствующее точке a_2, совпадает с характеристическим уравнением матрицы $C(t)$, соответствующим точке a_2.

Теперь матрицу $H_1(t)$ мы можем преобразовать совершенно так же, как и матрицу $C(t)$, и т. д. В конце концов приходим к граничной задаче с матрицей $H(t) = (h_{\alpha\beta}(t))$, причем $\det H(t) \neq 0$ на L и функции $h_{\alpha\beta}(t)$ удовлетворяют условию (2) всюду на L.

Совершенно так же можно исследовать граничную задачу

$$\varphi^{-}(t) = A(t)\,\varphi^{+}(t) + B(t),$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — заданные на L матрицы, удовлетворяющие условиям, аналогичным вышеприведенным.

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе
Академии наук ГрузССР

Поступило
25 X 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Г. Магнарадзе, Сообщ. АН Груз.ССР, 8, 9—10, 585 (1947). [2] J. Plemelj. Monatsh. f. Math. u. Phys., 19, 211 (1908). [3] М. И. Мусхелишвили и Н. П. Векуа, Тр. Тбилисск. математ. ин-та, 12, 1 (1943). [4] Л. Г. Магнарадзе, Сообщ. АН Груз.ССР, 8, 8, 509 (1947). [5] Ф. Д. Гахов, Докторская диссертация, Тбилиси, 1942. [6] Н. П. Векуа, Сообщ. АН Груз.ССР, 5, 1, 1 (1944).