Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 1

МАТЕМАТИКА

И. М. ГАНЗБУРГ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ СУММАМИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 28 X 1948)

Пусть $\tilde{C}$ есть класс непрерывных функций периода 2π, а $S_n(f, x)$ — конечная сумма Фурье порядка n функции $f \in \tilde{C}$. Представляет известный интерес изучение тригонометрических сумм вида:

$$\omega_n(\alpha_n, \beta_n; f, x) = \frac{1}{3}\{S_n(f, x) + S_n(f, x + \alpha_n) + S_n(f, x + \beta_n)\}, \quad (1)$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — произвольные последовательности, с точки зрения их равномерной сходимости к $f(x)$ для любой функции $f \in \tilde{C}$. Легко видеть, что, не уменьшая общности, можно считать $|\alpha_n| \leqslant \pi$, $|\beta_n| \leqslant \pi$.

Теорема. *Для того чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n(\alpha_n, \beta_n; f, x) = f(x) \quad (2)$$

равномерно относительно x для всех $f \in \tilde{C}$, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\alpha_n = \frac{4p\pi}{3(2n+1)} + O\left(\frac{1}{n \ln n}\right), \qquad \beta_n = \frac{4q\pi}{3(2n+1)} + O\left(\frac{1}{n \ln n}\right), \quad (3)$$

где $p = p(n)$ и $q = q(n)$ — целочисленные функции от $n = 1, 2, \ldots$, принимающие соответственно конечное число значений вида $3r - 1$ и $3s + 1$ (r и s — целые числа).

Доказательство этой теоремы основано на следующей лемме.

Лемма. *Пусть*

$$L_n(\alpha_n, \beta_n) = \frac{1}{3\pi}\int_0^\pi \left| \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} + \frac{\sin(2n+1)\left(u + \frac{\alpha_n}{2}\right)}{\sin\left(u + \frac{\alpha_n}{2}\right)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\sin(2n+1)\left(u + \frac{\beta_n}{2}\right)}{\sin\left(u + \frac{\beta_n}{2}\right)} \right| du. \quad (4)$$

При $|\alpha_n| \leqslant \pi$, $|\beta_n| \leqslant \pi$ имеет место асимптотическое равенство:

$$L_n(\alpha_n, \beta_n) = \frac{8}{3\pi^2} \ln \frac{\varphi(\alpha_n, \beta_n)\, \varphi(\alpha_n, \alpha_n - \beta_n)\, \varphi(1, 2\pi - |\alpha_n - \beta_n|)}{\psi(\alpha_n, \beta_n)} + O(1), \quad (5)$$

$$\varphi(x, y) = \frac{1 + |ny|}{\left(\frac{1 + |ny|}{1 + |nx|}\right)^{\left|\cos\frac{2n+1}{4}y\right|}}, \qquad \psi(x, y) = n\sqrt{1 + |nx|} \times$$
$$\times \left\{ |x| + \frac{1}{n} \right\}^{\frac{1}{4}\int_0^\pi \left|\sin u + \sin\left(u + \frac{2n+1}{2}x\right) + \sin\left(u + \frac{2n+1}{2}y\right)\right| du} \quad (6)$$

Доказательство. Пусть $k_1=k_1(\alpha_n)$ есть ближайшее к числу $\frac{2n+1}{2\pi}\alpha_n$ целое нечетное число; $k_2=k_2(\beta_n)$ определяется так же. Будем считать $|k_1|>|k_2|$.

Случай 1. $k_1k_2>0$. Пусть $k_1>0$ и $k_2>0$. Полагая

$$\gamma_n={}^1/_2(2n+1)\alpha_n-k_1\pi, \qquad \delta_n={}^1/_2(2n+1)\beta_n-k_2\pi \tag{7}$$

и принимая во внимание, что

$$1/\sin x-1/x=O(1) \quad \text{для всех} \quad |x|\leqslant\pi/2, \tag{8}$$

после некоторых преобразований получим:

$$L_n(\alpha_n,\beta_n)=I_1+I_2+I_3+I_4+O(1), \tag{9}$$

$$I_1=\frac{1}{3\pi^2}\int\limits_0^\pi\sum_{i=1}^{n-k_1}\left|\frac{\sin u}{i}-\frac{\sin(u+\gamma_n)}{i+k_1}-\frac{\sin(u+\delta_n)}{i+k_2}\right|du,$$

$$I_2=\frac{1}{3\pi^2}\int\limits_0^\pi\sum_{i=n-k_1+1}^{n-k_1+k_2}\left|\frac{\sin u}{2n-i-k_1+1}-\frac{\sin(u+\gamma_n)}{i}-\frac{\sin(u+\delta_n)}{i+k_1-k_2}\right|du, \tag{10}$$

$$I_3=\frac{1}{3\pi^2}\int\limits_0^\pi\sum_{i=n-k_1+k_2+1}^{n}\left|\frac{\sin u}{i-k_2}-\frac{\sin(u+\gamma_n)}{2n-i-k_1+k_2+1}-\frac{\sin(u+\delta_n)}{i}\right|du,$$

$$I_4=\frac{1}{3\pi^2}\int\limits_0^\pi{\sum_{i=1}^{n}}'\left|\frac{\sin u}{i}-\frac{\sin(u+\gamma_n)}{i-k_1}-\frac{\sin(u+\delta_n)}{i-k_2}\right|du.$$

Здесь и ниже штрих обозначает, что при суммировании опускаются члены со знаменателями, обращающимися в нуль.

а) Пусть $k_1<n/2$. Оценивая все I_ν, $\nu=1, 2, 3, 4$, получим:

$$I_1=\frac{2}{3\pi^2}\ln k_2+\frac{4}{3\pi^2}\left|\sin\frac{\delta_n}{2}\right|\ln\frac{k_1}{k_2}+$$

$$+\frac{1}{3\pi^2}\int\limits_0^\pi|\sin u-\sin(u+\gamma_n)-\sin(u+\delta_n)|\,du\cdot\ln\frac{n}{k_1}+O(1);\quad I_2=O(1);$$

$$I_3=O(1);\quad I_4=\frac{2}{\pi^2}\ln k_2+\frac{4}{3\pi^2}\ln(k_1-k_2)+\frac{4}{3\pi^2}\left|\sin\frac{\delta_n}{2}\right|\ln\frac{k_1}{k_2}+$$

$$+\frac{1}{3\pi^2}\int\limits_0^\pi|\sin u-\sin(u+\gamma_n)-\sin(u+\delta_n)|\,du\cdot\ln\frac{n}{k_1}+O(1),$$

$$\text{если}\quad k_2<k_1/2,$$

$$I_4=\frac{2}{3\pi^2}\ln k_2+\frac{8}{3\pi^2}\ln(k_1-k_2)+\frac{8}{3\pi^2}\left|\cos\frac{\gamma_n-\delta_n}{2}\right|\ln\frac{k_1}{k_1-k_2}+$$

$$+\frac{1}{3\pi^2}\int\limits_0^\pi|\sin u-\sin(u+\gamma_n)-\sin(u+\delta_n)|\,du\cdot\ln\frac{n}{k_1}+O(1),$$

$$\text{если}\quad k_2>k_1/2,$$

откуда $L_n(\alpha_n, \beta_n) = \frac{4}{3\pi^2}\ln k_2 + \frac{4}{3\pi^2}\ln(k_1 - k_2) + \frac{4}{3\pi^2}\ln\frac{k_2(k_1-k_2)}{k_1} +$

$$+\frac{8}{3\pi^2}\left|\sin\frac{\delta_n}{2}\right|\ln\frac{k_1}{k_2} + \frac{8}{3\pi^2}\left|\cos\frac{\gamma_n-\delta_n}{2}\right|\ln\frac{k_1}{k_1-k_2} +$$

$$+\frac{2}{3\pi^2}\int_0^\pi |\sin u - \sin(u+\gamma_n) - \sin(u+\delta_n)|\,du\cdot\ln\frac{n}{k_1} + O(1). \qquad (11)$$

б) При $k_1 > n/2$, производя соответствующие оценки, получим:

$$L_n = \frac{8}{3\pi^2}\ln k_2 + \frac{4}{3\pi^2}\ln(k_1-k_2) + \frac{8}{3\pi^2}\left|\sin\frac{\delta_n}{2}\right|\ln\frac{k_1}{k_2} + O(1),\ k_2 < \frac{n}{2}, \qquad (12)$$

$$L_n = \frac{4}{3\pi^2}\ln k_2 + \frac{8}{3\pi^2}\ln(k_1-k_2) + \frac{8}{3\pi^2}\left|\cos\frac{\gamma_n\,\delta_n}{2}\right|\ln\frac{k_1}{k_1-k_2} + O(1),\ k_2 > \frac{n}{2}.$$

При $k_1 < 0$ и $k_2 < 0$ приходим к тем же оценкам, если заменить k_1, k_2 соответственно их модулями.

Случай 2. $k_1 k_2 < 0$.

Пусть $k_1 > 0$, $k_2 < 0$. Как и в случае 1, пользуясь (8), находим:

$$L_n(\alpha_n, \beta_n) = I_1' + I_2' + I_3' + I_4' + O(1), \qquad (13)$$

$$I_1' = \frac{1}{3\pi^2}\int_0^\pi \sum_{i=1}^{n-k_1}{}' \left|\frac{\sin u}{i} - \frac{\sin(u+\gamma_n)}{i+k_1} - \frac{\sin(u+\delta_n)}{i-|k_2|}\right| du;$$

$$I_2' = \frac{1}{3\pi^2}\int_0^\pi \sum_{i=n-k_1+1}^{n} \left|\frac{\sin u}{2n-i-k_1+1} - \frac{\sin(u+\gamma_n)}{i} - \frac{\sin(u+\delta_n)}{2n-i-k_1-|k_2-+1}\right| du;$$

$$I_3' = \frac{1}{3\pi^2}\int_0^\pi \sum_{i=1}^{n-|k_2|}{}' \left|\frac{\sin u}{i} - \frac{\sin(u+\gamma_n)}{i-k_1} - \frac{\sin(u+\delta_n)}{i+|k_2|}\right| du; \qquad (14)$$

$$I_4' = \frac{1}{3\pi^2}\int_0^\pi \sum_{n-|k_2|+1}^{n} \left|\frac{\sin u}{2n-i-|k_2|+1}\right| - \frac{\sin(u+\gamma_n)}{2n-i-k_1-|k_2|+1} - \frac{\sin(u+\delta_n)}{i}\Bigg| du.$$

Производя соответствующие оценки, получим:

$$L_n(\alpha_n, \beta_n) = \frac{8}{3\pi^2}\ln|k_2| + \frac{4}{3\pi^2}\ln k_1 + \frac{8}{3\pi^2}\left|\sin\frac{\delta_n}{2}\right|\ln\left|\frac{k_1}{k_2}\right| +$$

$$+\frac{2}{3\pi^2}\int_0^\pi |\sin u - \sin(u+\gamma_n) - \sin(u+\delta_n)|\,du\cdot\ln\frac{n}{k_1} + O(1),$$

если $k_1 < n/2$, $|k_2| < n/2$;

$$L_n(\alpha_n, \beta_n) = \frac{8}{3\pi^2}\ln|k_2| + \frac{4}{3\pi^2}\ln k_1 + \frac{8}{3\pi^2}\left|\sin\frac{\delta_n}{2}\right|\ln\left|\frac{k_1}{k_2}\right| + O(1), \qquad (15)$$

если $k_1 > n/2$, $|k_2| < n/2$;

$$L_n(\alpha_n, \beta_n) = \frac{8}{3\pi^2}\ln(2n-k_1-|k_2|) + \frac{8}{3\pi^2}\left|\sin\frac{\gamma_n-\delta_n}{2}\right|\ln\frac{n}{2n-k_1-|k_2|} +$$

$$+\frac{4}{3\pi^2}\ln n + O(1), \quad \text{если } k_1 > \frac{n}{2},\ |k_2| > \frac{n}{2}.$$

При $k_1 < 0$, $k_2 > 0$ получим такие же оценки, если заменить k_1 на $|k_1|$. Сравнивая (11), (12) и (15), легко обнаружить, что асимптотическое выражение L_n для всех возможных случаев имеет вид:

$$L_n(\alpha_n, \beta_n) = \frac{4}{3\pi^2}\ln|k_2| + \frac{4}{3\pi^2}\ln|k_1 - k_2| + \frac{4}{3\pi^2}\ln\left|\frac{k_2(k_1-k_2)}{k_1}\right| +$$
$$+\frac{8}{3\pi^2}\ln\frac{2n-|k_1-k_2|}{n} + \frac{8}{3\pi^2}\left|\sin\frac{\delta_n}{2}\right|\ln\left|\frac{k_1}{k_2}\right| +$$
$$+\frac{8}{3\pi^2}\left|\cos\frac{\gamma_n-\delta_n}{2}\right|\ln\left|\frac{k_1}{k_1-k_2}\right| + \frac{8}{3\pi^2}\left|\sin\frac{\gamma_n-\delta_n}{2}\right|\ln\frac{n}{2n-|k_1-k_2|} +$$
$$+\frac{2}{3\pi^2}\int_0^\pi |\sin u - \sin(u+\gamma_n) - \sin(u+\delta_n)|\,du\cdot\ln\frac{n}{|k_1|} + O(1). \quad (16)$$

Отсюда нетрудно получить (5).

Доказательство теоремы. Пусть $E_n(f)$ — наилучшее приближение порядка n функции $f(x)$, а $\omega(f, h)$ — ее модуль непрерывности. Нетрудно убедиться в справедливости неравенства:

$$|\omega_n(\alpha_n, \beta_n; f, x) - f(x)| \leqslant [1 + L_n]\,E_n(f) + \frac{1}{3}\,\omega(f, \alpha_n) + \frac{1}{3}\,\omega(f, \beta_n). \quad (17)$$

Из леммы следует, что L_n ограничена тогда и только тогда, если

$$k_1(\alpha_n) = O(1), \qquad k_2(\beta_n) = O(1),$$
$$\int_0^\pi |\sin u - \sin(u+\gamma_n) - \sin(u+\delta_n)|\,du = O\left(\frac{1}{\ln n}\right), \quad (18)$$

что равносильно (3). Необходимость условий (3) вытекает в силу (5) из известной теоремы о последовательности линейных операторов с неограниченными нормами.

Замечание. Можно рассматривать метод суммирования:

$$\overline{\omega}_n(\alpha_n, \beta_n; f, x) = S_n(f, x+\alpha_n) + S_n(f, x+\beta_n) - S_n(f, x). \quad (19)$$

Его константа Лебега

$$\overline{L}_n(\alpha_n, \beta_n) = 3L_n\left(\alpha_n \pm \frac{2\pi}{2n+1}, \beta_n \pm \frac{2\pi}{2n+1}\right) + O(1). \quad (20)$$

Из проведенных выше рассуждений легко получить необходимое и достаточное условие сходимости $\overline{\omega}_n(\alpha_n, \beta_n; f, x)$ к $f(x)$ на классе непрерывных функций периода 2π:

$$\alpha_n = \frac{2p\pi}{3(2n+1)} + O\left(\frac{1}{n\ln n}\right), \qquad \beta_n = \frac{2q\pi}{3(2n+1)} + O\left(\frac{1}{n\ln n}\right), \quad (21)$$

где $p = p(n)$ и $q = q(n)$—целочисленные функции от $n = 1, 2, \ldots$, принимающие соответственно конечное число значений вида $6r - 1$ и $6s + 1$. Суммы (1) и (19) соответственно при $\beta_n = -\alpha_n = 2\pi/3n$ и $\beta_n = -\alpha_n = \pi/3n$ в неявном виде содержатся в работе Рогозинского [1].

В заключение считаю долгом выразить глубокую благодарность А. Ф. Тиману за постановку задачи и ряд ценных указаний.

Поступило
7 IX 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Rogosinski, Math. Ann., 95, 110 (1925).