Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 1

МАТЕМАТИКА

Ю. Ф. БОРИСОВ

КРИВЫЕ НА ПОЛНЫХ ДВУМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ С КРАЕМ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 9 XI 1948)

В заметке А. Д. Александрова (1) развиты основы внутренней геометрии двумерных многообразий, удовлетворяющих некоторому весьма общему условию «ограниченности кривизны». Будем рассматривать двумерные многообразия, получаемые в результате пополнения многообразий ограниченной кривизны. При этом мы требуем, чтобы пополненное многообразие было гомеоморфно топологической поверхности с краем и чтобы точки, добавленные к многообразию при его пополнении, соответствовали по гомеоморфизму „краю" поверхности. Такие пополненные многообразия будем называть просто многообразиями с краем. Это название несколько условно, так как „край" может отсутствовать: важна лишь полнота внутренней метрики.

В настоящей заметке мы рассмотрим некоторые теоремы о кратчайших на многообразиях с краем, а также приложение этих теорем для обобщения на рассматриваемые многообразия с краем некоторых результатов С. Э. Кон-Фоссена (2), полученных для двумерных многообразий с римановой метрикой.

1°. Угол. Понятие угла между кривыми в любом метрическом пространстве определено у А. Д. Александрова (3). В многообразии ограниченной кривизны между любыми двумя кратчайшими существует угол (1). Вопрос о существовании угла между кратчайшими на многообразии с краем решается положительно.

Теорема 1. *В многообразии с краем между любыми двумя кратчайшими, исходящими из одной точки, существует угол. Если кратчайшие разбивают окрестность их общей точки на два топологических сектора, то для каждого из них существует конечный „угол сектора", определяемый как точная верхняя граница сумм углов между „последовательными" кратчайшими, разбивающими данный сектор на сектора с той же вершиной.*

2°. Поворот кратчайшей. В (3) определено понятие поворота кривой на выпуклой поверхности. Это определение исходит из того, что поворот геодезической ломаной на выпуклой поверхности равен $\sum\limits_i (\pi - \theta_i)$, где θ_i — угол ломаной с выбранной стороны (здесь под углами ломаной понимаются углы соответствующих секторов). В случае любого многообразия ограниченной кривизны такое определение поворота ломаной не годится, так как необходимо приписывать определенный поворот каждому ее звену. Поэтому мы сначала определим поворот кратчайшей, после чего поворот любой кривой определится через повороты сходящихся к ней ломаных буквально так же, как в случае выпуклых поверхностей.

Пусть A и B — концы кратчайших L. Будем различать два случая: 1) из точек A и B исходят кратчайшие, проходящие в той „полуокрестности"* L, со стороны которой определяется поворот, и не имеющие с краем многообразия и с кратчайшей L общих точек, кроме A и B; 2) хотя бы одна из точек A, B не обладает этим свойством (в том, что случай 2) действительно может иметь место, легко убедиться на примере куска плоскости, ограниченного дугой окружности и двумя касательными).

В случае 1) поворот кратчайшей определяем через углы сходящихся к ней ломаных так же, как на выпуклых поверхностях, добавляя условие, чтобы все сходящиеся ломаные не имели с краем многообразия и с кратчайшей L общих точек, кроме A, B. В случае 2) сколь угодно близко от каждой из «плохих» точек берем точки A_n, B_n (одна из них может совпадать с концом кратчайшей) так, что кратчайшая $L_n \subset L$ с концами A_n, B_n подходит под случай 1), вычисляем ее поворот φ_n и переходим к пределу при $n \to \infty$ ($A_n \to A$, $B_n \to B$).

Теорема 2. *Всякая кратчайшая, имеющая полуокрестность, ограниченную геодезической** ломаной, имеет со стороны этой полуокрестности конечный неположительный поворот.*

Теорема 3. *Пусть L — кратчайшая, исходящая из точки O, M — точка, принадлежащая L, а $\varphi_{\widehat{OM}}$ — поворот дуги $\widehat{OM}$ кратчайшей L (с определенной стороны). Тогда при $M \to 0$ $\varphi_{\widehat{OM}} \to 0$.*

Сложение поворотов дуг, составляющих данную кривую, происходит так же, как на выпуклых поверхностях ([3]). Учитывая это обстоятельство, естественно называть свойство поворота кратчайшей, выражаемое теоремой 3, полной аддитивностью. При этом становится очевидным, что в самом определении поворота кратчайшей можно избежать той двойственности, которая связана с особенностями ее концов, так как определение поворота, данное в случае 2), в применении к случаю 1) дает тот же результат.

3°. В наших построениях существенную роль играют кратчайшие, имеющие с краем многообразия лишь одну общую точку. Относительно существования таких кратчайших имеет место

Теорема 4. *Пусть L — кратчайшая в многообразии с краем, имеющая полуокрестность. Тогда из каждой внутренней точки L исходит кратчайшая, все точки которой, за исключением, может быть, данной, принадлежат полуокрестности (и, следовательно, не принадлежат краю многообразия).*

Эта теорема существенно опирается на условие ограниченности кривизны „внутренности" многообразия. Без этого условия теорема неверна, в чем можно убедиться на примере.

4°. Под геодезическим многоугольником мы здесь понимаем множество, гомеоморфное замкнутому кругу и ограниченное геодезической ломаной. Связь кривизны с поворотом устанавливается теоремой:

Теорема 5. *Пусть R — геодезический многоугольник, G — его внутренняя область, $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — стороны (т. е. дуги геодезических). Для кривизны $\omega(G)$ области G имеет место формула*

$$\omega(G) = 2\pi - \sum_{i=1}^{n} \varphi_G(l_i) - \sum_{i=1}^{n} (\pi - \theta_i),$$

где θ_i — углы многоугольника R (т. е. углы секторов, ограниченных сторонами l_i и содержащихся в R), а $\varphi_G(l_i)$ — повороты дуг l_i со стороны области G.

Одна общая теорема А. Д. Александрова об углах треугольника

* Полуокрестность кривой гомеоморфна внутренней области прямоугольника, одна сторона которого соответствует по гомеоморфизму данной кривой.

** Геодезической называем кривую, являющуюся кратчайшей на каждом достаточно малом отрезке.

в компактном метрическом пространстве с внутренней метрикой позволяет вывести из теорем 1 и 5 следующий результат.

Теорема 6. *Пусть $\overline{T}$ — геодезический треугольник, стороны которого являются кратчайшими в этом треугольнике. Тогда изменение его углов при переходе к плоскому треугольнику со сторонами той же длины оценивается так:*

$$-13\Omega - 6\varphi \leqslant \alpha - \alpha' \leqslant 5\Omega\,, \qquad -13\Omega - 6\varphi \leqslant \beta - \beta' \leqslant 5\Omega\,,$$
$$-13\Omega - 6\varphi \leqslant \gamma - \gamma' \leqslant 5\Omega\,,$$

где Ω — абсолютная кривизна (1) *внутренней области треугольника $\overline{T}$; α, β, γ — углы $\overline{T}$, а α', β', γ' — соответствующие углы плоского треугольника; $\varphi = \max\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$; φ_1, φ_2, φ_3 — абсолютные величины поворотов сторон $\overline{T}$ со стороны его внутренней области.*

Эта оценка является качественной: численные коэффициенты не имеют для дальнейшего никакого значения. Мы предполагаем, что в точной оценке в левых частях стоит $\omega^- - \varphi$, в правых ω^+, где ω^-, ω^+ вычислены для „внутренности“ $\overline{T}$ (1).

5°. Теорема 6 в соединении с теоремой 3 позволяет установить известную для многообразий с римановой метрикой связь между изменением длины кратчайшей при смещении ее концов вдоль края многообразия и углами, которые кратчайшая образует с краем.

Пусть многообразие с краем гомеоморфно полуплоскости с границей и каждая из бесконечных дуг, на которые граничная кривая разбивается одной из ее точек, начиная с некоторого места, является кривой, у которой каждая конечная дуга имеет „поворот ограниченной вариации“ (3).

Возьмем точки A и B на этих кривых и соединим их такой кратчайшей, что никакая другая кратчайшая, соединяющая те же точки, не проходит через точки области, гомеоморфной полуплоскости и ограниченной дугой рассматриваемой кратчайшей и бесконечными дугами граничной кривой (нетрудно показать, чта такая кратчайшая существует). Введем на каждой из бесконечных дуг границы в качестве параметра длину дуги s, отсчитываемую соответственно от точек A и B*. Каждую пару точек, отвечающую одинаковым значениям s, соединим кратчайшей только что описанного вида, и пусть $\alpha(s)$, $\beta(s)$ — углы этой кратчайшей с бесконечными дугами границы (углы секторов, „стороны“ которых идут в направлении возрастания s). Пусть длина этой кратчайшей равна $l(s)$. Тогда имеет место

Теорема 7. *Функция $l(s)$, $0 \leqslant s < \infty$, всюду имеет правую производную, равную $\cos\alpha(s) + \cos\beta(s)$. Если точка B (A) закреплена, то при тех же условиях правая производная равна $\cos\alpha(s)$ ($\cos\beta(s)$).*

Приводимые ниже теоремы представляют собой перенесение теорем Кон-Фоссена на рассматриваемые нами многообразия с краем. Их доказательства основаны на теореме 7 и проводятся в основном так же, как у С. Э. Кон-Фоссена.

6°. Формулируем эти теоремы. Кривизной бесконечной области в многообразии ограниченной кривизны будем называть предел (если таковой существует) кривизны „бесконечно расширяющихся“ компактных областей, заполняющих в пределе данную область. Пусть имеется бесконечная в обе стороны кривая, каждая дуга которой имеет поворот. Разобьем ее на счетное множество дуг, гомеоморфных отрезку, и рассмотрим бесконечный ряд, составленный из поворотов этих дуг (с определенной стороны) и поворотов в точках разбиения (3). Если этот ряд сходится при любом разбиении, то будем говорить, что бес-

* Можно показать, что кривая с поворотом ограниченной вариации спрямляема.

конечная кривая имеет поворот, равный сумме ряда (эта сумма, очевидно, не зависит от способа разбиения).

Теорема 8. *Пусть многообразие с краем гомеоморфно полуплоскости с границей и граничная кривая имеет поворот* φ. *Тогда, если множество внутренних точек многообразия имеет кривизну* ω, *то* $\omega \leqslant \pi - \varphi$.

Теорема 9. *Если в условиях предыдущей теоремы граничная кривая является кратчайшей на любом ее участке, то имеет место оценка* $\omega \leqslant -\varphi$.

Теорема 10. *Пусть многообразие с краем гомеоморфно плоской полосе, ограниченной параллельными прямыми, и граничные кривые имеют соответственно повороты* φ_1 *и* φ_2. *Тогда для кривизны множества внутренних точек (если она существует) имеет место неравенство* $\omega \leqslant -\varphi_1 - \varphi_2$.

Теорема 11. *Пусть многообразие с краем гомеоморфно плоскости с вырезанным кругом,* φ — *поворот граничной кривой,* ω — *кривизна множества внутренних точек. Тогда* $\omega \leqslant -\varphi$.

Формулированные теоремы позволяют выяснить топологическое строение многообразий с краем, получающихся пополнением выпуклых * областей в многообразиях ограниченной кривизны при условии, что область гомеоморфна бесконечному куску плоскости и всякое содержащееся в ней множество имеет неотрицательную кривизну. Результат состоит в следующем.

Теорема 12. *Многообразие с краем, удовлетворяющее поставленным условиям и не гомеоморфное плоскости, может быть лишь следующих типов:* 1) *многообразие с краем, гомеоморфное полуплоскости;* 2) *многообразие с краем, изометричное области на поверхности бесконечного цилиндра, ограниченной простой замкнутой кривой;* 3) *многообразие с краем, изометричное плоской полосе между двумя параллельными прямыми.*

В силу теоремы А. Д. Александрова о реализуемости метрики неотрицательной кривизны ([3]), все полученные многообразия можно рассматривать как бесконечные области соответствующего строения на выпуклых поверхностях трехмерного евклидова пространства.

Простую замкнутую кривую с одной отмеченной точкой будем называть петлей, отмеченную точку — вершиной петли. Поворот этой замкнутой кривой со стороны ограничиваемой ею области ([3]), гомеоморфной кругу, за вычетом поворота в вершине, назовем поворотом петли. Петлю назовем геодезической, если всякая достаточно малая ее дуга, не содержащая вершины в качестве внутренней точки, кратчайшая.

Теорема 13. *Пусть полное многообразие ограниченной кривизны гомеоморфно плоскости и его кривизна равна* ω. *Если* $\omega \leqslant \pi$, *то для всякого ограниченного множества* M *рассматриваемого многообразия найдется содержащее его ограниченное множество* N, *такое, что всякая точка, не принадлежащая* N, *является вершиной петли, охватывающей* M *и имеющей поворот* φ, *для которого* $|\varphi - (\pi - \omega)| < \varepsilon$, *где* ε — *заранее выбранное произвольное положительное число. Если* $\omega > \pi$, *то каждая точка вне* N *является вершиной геодезической петли, охватывающей* M.

Поступило
3 XI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Д. Александров, ДАН, 60, № 9 (1948). [2] С. Кон-Фоссен, Матем. сб., 1 (43) : 2 (1936). [3] А. Д. Александров, Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, 1948.

* Выпуклой мы называем область, содержащую вместе с любой парой точек соединяющую их кратчайшую.