Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 1

МАТЕМАТИКА

Д. Л. БЕРМАН

СХОДИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ОПЕРАЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 9 XI 1948)

1°. Пусть заданы треугольная матрица узлов

$$\begin{array}{l} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)}\, x_2^{(2)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1^{(n)}\, x_2^{(n)} \ldots x_n^{(n)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array} \tag{1}$$

$$-1 \leqslant x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} \leqslant 1 \quad (n=1, 2, \ldots)$$

и функция $f(x)$, определенная в интервале $[-1, 1]$.

Рассмотрим операцию вида

$$U_n(f, x) = \sum_{k=1}^{n} m_k^{(n)}(f)\, l_k^{(n)}(x), \tag{2}$$

где $\{l_k^{(n)}(x)\}_{k=1}^{n}$ — фундаментальные полиномы Лагранжа, построенные для n-й строчки матрицы (1), и $\{m_k^{(n)}(f)\}_{k=1}^{n}$ — числа, определяемые по определенному закону в зависимости от функции $f(x)$.

С. Н. Бернштейн [1] доказал теорему:

Пусть матрица (1) *чебышевская* $\left(x_k^{(n)} = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$ *и числа* $\{m_k^{(n)}(f)\}_{k=1}^{n}$ *определяются по формулам:*

$$m_k^{(n)}(f) = \frac{f(x_{k-1}^{(n)}) + 2f(x_k^{(n)}) + f(x_{k+1}^{(n)})}{4} \quad (k=2, 3, \ldots, n-1),$$

$$m_1^{(n)}(f) = \frac{3f(x_1^{(n)}) + f(x_2^{(n)})}{4}, \qquad m_n^{(n)}(f) = \frac{f(x_{n-1}^{(n)}) + 3f(x_n^{(n)})}{4},$$

где $f(x)$ — *произвольная непрерывная функция в интервале* $[-1, 1]$.

Тогда имеет место, равномерно относительно $x \in [-1, 1]$, *равенство* $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(f, x) = f(x)$.

В следующем пункте мы обобщим теорему С. Н. Бернштейна.

2°. Для произвольной матрицы (1) и произвольной функции $f(x)$ определим числа $\{m_k^{(n)}(f)\}$ следующим образом:

$$m_k^{(n)}(f)=2^{-2s}\sum_{\nu=-s}^{\nu=s} C_{2s}^{\nu+s} f(x_{k+\nu}^{(n)}) \quad (k=1, 2, \ldots, n;\ n=n_0,\ n_0+1, \ldots), \quad (3)$$

где $C_{2s}^{\nu+s}$ — число сочетаний, s — произвольное натуральное число; $x_{k+\nu}^{(n)}=x_k^{(n)}$, если $k+\nu\leqslant 0$ или $k+\nu>n$.

Операцию (2), у которой числа $\{m_k^{(n)}(f)\}$ определяются по (3), мы будем обозначать через $U_n^{\{s\}}(f, x)$.

Введем еще следующие обозначения: $\Delta_n=\max\limits_{k=1, 2, \ldots, n-1}[(x_{k+1}^{(n)}-x_k^{(n)})]$; $\sigma(a, b)$ — число узлов n-й строчки матрицы (1), удовлетворяющих неравенствам $a\leqslant x_j^{(n)}\leqslant b$.

Теорема 1 ([2]). *Пусть матрица* (1) *удовлетворяет следующим условиям*:

А. $\Delta_n\to 0$ *при* $n\to\infty$.

В. *В точке* $x_0\in[-1, 1]$ *выполняются неравенства*:

при $x_k^{(n)}<x_{k+1}^{(n)}\leqslant x_0 \qquad |l_k^{(n)}(x_0)|\leqslant|l_{k+1}^{(n)}(x_0)| \qquad (n=n_0, n_0+1, \ldots)$;
при $x_0\leqslant x_k^{(n)}<x_{k+1}^{(n)} \qquad |l_k^{(n)}(x_0)|\geqslant|l_{k+1}^{(n)}(x_0)| \qquad (n=n_0, n_0+1, \ldots)$.

С. *Если* $\sigma(x_0, x_j^{(n)})=h$, *то* $|l_j^{(n)}(x_0)|\leqslant k(x_0)\varphi(h)$, $n=n_0$, $n_0+1, \ldots$,

где $k(x_0)$ — *неотрицательное конечное число и* $\varphi(h)$ — *произвольная неотрицательная функция от* h, *удовлетворяющая условию* $\varphi(h)\to 0$ *при* $h\to\infty$.

Пусть функция $f(x)$ *ограничена в интервале* $[-1, 1]$ *и непрерывна в точке* x_0.

При этом

$$\lim_{n\to\infty} U_n^{\{s\}}(f, x_0)=f(x_0). \quad (4)$$

Замечание 1. Пусть матрица (1) удовлетворяет условию А, в любой точке множества $E\subset[-1, 1]$ имеют место условия В и С и

$$k(x)\leqslant m, \qquad x\in E$$

(m — конечное неотрицательное число). Пусть $f(x)$ непрерывна в $[-1, 1]$. Тогда соотношение (4) выполняется равномерно на множестве E.

Замечание 2. При построении интерполяционной операции $U_n^{\{s\}}(f, x)$ были использованы биномиальные коэффициенты с четным нижним индексом. Можно с таким же успехом использовать биномиальные коэффициенты с нечетным нижним индексом.

Учитывая результаты нашей заметки ([3]), можно из замечания 1 получить следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть матрица* (1) *якобиева* с параметрами* $-1\leqslant\alpha<0$, $-1\leqslant\beta<0$ *и функция* $f(x)$ *непрерывна в* $[-1, 1]$.

Тогда соотношение (4) *выполняется равномерно в интервале* $[-1, 1]$. *Если матрица* (1) *лежандрова, то соотношение* (4) *выполняется равномерно в любом интервале вида* $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<1$.

* Мы называем матрицу (1) якобиевой с параметрами α и β, если ее n-я строчка составлена из корней полинома Якоби $J_n(x, \alpha, \beta)$.

Вышеупомянутая теорема С. Н. Бернштейна вытекает из теоремы 2.

3°. В предыдущем пункте и в нашей заметке ([3]) рассматривались операции вида (2), сходящиеся в любой точке непрерывности ограниченной функции. Теперь мы построим операции вида (2), сходящиеся в каждой точке Лебега ограниченной измеримой функции при условии, что матрица (1) принадлежит некоторому классу матриц узлов.

Определим числа $\{m_k^{(n)}(f)\}$ из формулы (2) следующим образом:

$$m_k^{(n)}(f)=\frac{1}{x_{k+1}^{(n)}-x_k^{(n)}}\int\limits_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} f(t)\,dt, \quad k\neq 0(\operatorname{mod} 2l),\ k\neq n;$$

$$m_{2lt}^{(n)}(f)=\sum_{j=1} m^{(n)}_{2l(t-1)+2j-1}-\sum_{j=1}^{l-1} m^{(n)}_{2l(t-1)+2j}.$$

Если $n=2lq+r,\ 0<r<2l$, тогда

$$m_n^{(n)}(f)=m^{(n)}_{2lq+1}+m^{(n)}_{2lq+3}+\ldots+m^{(n)}_{2lq+r-1}-$$
$$-m^{(n)}_{2lq+2}-m^{(n)}_{2lq+4}-\ldots-m^{(2)}_{2lq+r-2},$$

где l — произвольное фиксированное натуральное число.

Операцию (2) с такими значениями для чисел $\{m_k^{(n)}(f)\}$ мы обозначим через $\overline{U}_n^{\{l\}}(f,x)$.

Теорема 3 ([2]). *Пусть матрица* (1) *удовлетворяет следующим условиям*:

а) *Для любого интервала* $I_\varepsilon=[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<1$, *существуют константы* $C_1(\varepsilon)$, $C_2(\varepsilon)$ *такие, что для узлов из* I_ε *справедливы неравенства*

$$\frac{C_2(\varepsilon)}{n}\leqslant x_{k+1}^{(n)}-x_k^{(n)}\leqslant\frac{C_1(\varepsilon)}{n},$$

где $C_1(\varepsilon)$ *и* $C_2(\varepsilon)$ *зависят лишь от* ε.

б) *В любой точке выполняются условия* В *и* С *из теоремы* 1.

Пусть $f(x)$ — *ограниченная измеримая функция в интервале* $[-1, 1]$.

Тогда в любой точке Лебега x *имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\overline{U}_n^{\{l\}}(f,x)=f(x). \tag{5}$$

Из этой теоремы можно получить следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть матрица* (1) — *якобиева с параметрами* $-1\leqslant\alpha\leqslant 0$, $-1\leqslant\beta\leqslant 0$ *и* $f(x)$ — *ограниченная измеримая функция в интервале* $[-1, 1]$,

Тогда в любой точке Лебега имеет место (5).

Теоремы 3 и 4 также справедливы для операции вида (2), где числа $\{m_\nu^{(n)}(f)\}$ определяются по формулам

$$m_\nu^{(n)}(f)=2^{-2s}\sum_{k=-s}^{s} a_{\nu+k}^{(n)} C_{2s}^{s+k} \quad (\nu=1, 2, \ldots, n;\ n=n_0,\ n_0+1, \ldots),$$

причем $a_\nu^{(n)}=\dfrac{1}{x_{\nu+1}^{(n)}-x_\nu^{(n)}}\displaystyle\int_{x_\nu^{(n)}}^{x_{\nu+1}^{(n)}} f(t)\,dt$ и при $\nu+k\leqslant 0$ или $\nu+k\geqslant n$

$a_{\nu+k}^{(n)}=a_\nu^{(n)}$.

Поступило
3 XI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Сообщ. Харьковск. матем. об-ва, сер. 4, **5**, 49 (1932). [2] Д. Л. Берман, Диссертация, ЛГУ, 1948. [3] Д. Л. Берман, ДАН, **60**, № 3 (1948).