Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 9

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Л. А. ЦЕЙТЛИН

ЕМКОСТЬ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПРОВОДОВ

(Представлено академиком В. Ф. Миткевичем 14 X 1946)

1. Определение собственной и взаимной емкости систем проводов сводится к определению потенциальных коэффициентов α_{kk} и α_{ki} отдельных проводов, входящих в системы. Точное решение этой задачи в большинстве случаев невозможно из-за трудностей, связанных с неравномерностью распределения электричества по поверхности проводников. Достаточно точное решение может быть получено, если, следуя Хоу, допустить равномерное распределение электричества и, определив при этом условии среднее значение потенциала проводника, принять его за истинное. Решение рассматриваемой задачи известно для систем, состоящих из прямолинейных проводов [1]. Случай, когда в состав системы входят и криволинейные провода, насколько нам известно, не рассматривался.

Настоящая работа посвящена определению коэффициентов α_{kk} криволинейных проводов. Что касается коэффициентов α_{ki}, то здесь мы укажем лишь, что всегда можно заменить каждый криволинейный провод совокупностью нескольких прямолинейных, достаточно близко совпадающих с ним, и тогда задача сведется к случаю, для которого общее решение известно [1].

2. Переходя к определению α_{kk}, мы примем, что: 1) провод имеет постоянное по всей длине поперечное сечение; 2) ось провода изогнута по дуге гладкой кривой, уравнение которой задано; 3) длина провода, радиусы кривизны кривой, по которой изогнута его ось и все хорды этой кривой, за исключением соответствующих малым углам смежности, значительно больше линейных размеров сечения провода. Для наглядности и простоты рассуждений будем рассматривать случай, когда ось провода изогнута по плоской кривой. Окончательный результат может быть обобщен и на случаях неплоской кривой.

3. Общее выражение для потенциального коэффициента α_{kk}, полученное по методу Хоу, имеет вид [1]:

$$\alpha_{kk} = \frac{1}{\varepsilon l^2 \lambda^2} \int\limits_S \int\limits_S \frac{d\lambda' \, d\lambda'' \, dl' \, dl''}{D} = \frac{1}{\varepsilon l^2 \lambda^2} \int\limits_\lambda \int\limits_\lambda J \, d\lambda' \, d\lambda'', \tag{1}$$

где

$$J = \int\limits_{l'} \int\limits_{l''} \frac{dl' \, dl''}{D}, \tag{2}$$

l — длина, λ — периметр поперечного сечения, s — боковая поверхность провода, ε — диэлектрическая проницаемость окружающей среды, $d\lambda'$, $d\lambda''$ — элементы периметра, dl', dl'' — элементы образующих l' и l'' боковой поверхности провода, D — расстояние между dl' и dl'' (рис. 1). Пусть ϑ — угол между элементами длины dl' и dl''; R_m — наименьший радиус кривизны кривой l, по которой изогнута ось провода; η — кратчайшее расстояние между образующими l' и l'', и m — отношение $\eta / 2R_m$. Введем угол ψ, удовлетворяющий двойному неравенству: $m \leqslant \psi \leqslant 1$ (для чего можно, например, положить $\psi^2 = m$), и в соответствии с перечисленными выше условиями примем, что длина любой из кривых l, l' и l'', а при $|\vartheta| > \psi$ и все хорды этих кривых, не меньше величин порядка ψR_m. Обозначим через m_0 наибольшее в пределах сечения значение величины m, условимся в дальнейшем пренебрегать величинами порядка m_0 по сравнению с единицей. Тогда можно написать: $dl' = dl_1$, $dl'' = dl_2$, $D_{12}^2 = \delta^2 + \eta^2$ и

$$J = \int\limits_l dl_1 \int\limits_l \frac{dl_2}{\sqrt{\delta^2 + \eta^2}}. \qquad (3)$$

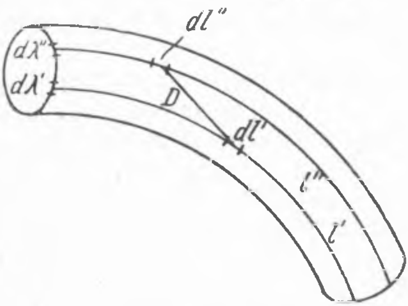

Рис. 1

где dl_1 и dl_2 — элементы длины кривой l, соответствующие элементам длины dl' и dl''; δ — расстояние между dl_1 и dl_2. Если отсчитывать координаты l' и l'' от одного из концов провода, то в силу симметрии выражения (3) относительно l_1 и l_2 можно заменить интегрирование по области $(0 \leqslant l_1 \leqslant l,\ 0 \leqslant l_2 \leqslant l)$ интегрированием по области $S\,(0 \leqslant l_1 \leqslant l,\ 0 \leqslant l_2 \leqslant l_1)$ с последующим удвоением результата. Область S разобьем на три: $S_1 (0 \leqslant l_1 \leqslant h,\ \ 0 \leqslant l_2 \leqslant l_1)$, $S_2' (h \leqslant l_1 \leqslant l, l_1 - h \leqslant l_2 \leqslant l_1)$, $S_2'' \ (h \leqslant l_1 \leqslant l,\ 0 \leqslant l_2 \leqslant l_1 - h)$, где $h = \psi R_m$.

В областях S_1 и S_2' все хорды δ меньше h, и можно принять: $\delta = l_1 - l_2$, после чего интегрирование по l_2 выражения (3) дает:

$$J_1 = \ln (l_1 + \sqrt{l_1^2 + \eta^2} - \ln \eta, \qquad (4)$$

$$J_2' = \ln (h + \sqrt{h^2 + \eta^2}) - \ln \eta \approx \ln 2h - \ln \eta. \qquad (5)$$

В области S_2' отношение η^2 / δ^2 имеет порядок малости не ниже, чем m, и можно принять: $\sqrt{\delta^2 + \eta^2} = \delta$. Поэтому

$$J_2'' = V (l_1, l_1 - h) - V (l_1, 0),$$

где $V (l_1, l_2)$ — функция, первообразная по отношению к $1 / \delta$ при переменной l_2. Интеграл по l_2 в области S_2 равен

$$J_2 = J_2' + J_2'' = V (l_1, l_1 - h) - V (l_1, 0) + \ln 2h - \ln \eta.$$

Так как результат интегрирования по l_2 не может зависеть от значения величины h, что легко показать и непосредственным вычислением, то можно написать:

$$V (l_1, l_1 - h) = W (l_1) - \ln 2h, \quad J_2 = W (l_1) - V (l_1, 0) - \ln \eta,$$

где $W (l_1)$ не зависит от h.

Представим двойной интеграл (3) в виде:

$$J=2\int_0^h J_1\,dl_1+2\int_h^l J_2\,dl_1=2\int_0^h (J_1-J_2)\,dl_1+2\int_0^l J_2\,dl_1.$$

При $0\leqslant l_1\leqslant h$ можно принять: $\delta=l_1-l_2$, и, следовательно,

$$V(l_1,l_2)=-\ln(l_1-l_2),\ V(l_1,0)=-\ln l_1,\ W(l_1)=\ln 2,$$

$$J_1-J_2=\ln(l_1+\sqrt{l_1^2+\eta^2})-\ln 2l_1.$$

Интегрируя, найдем:

$$\int_0^h (J_1-J_2)\,dl_1=h\ln(h+\sqrt{h^2+\eta^2})-\sqrt{h^2+\eta^2}-h\ln 2h+h+\eta\approx\eta,$$

и, следовательно,

$$J=2\int_0^l [W(l_1)-V(l_1,0)]\,dl_1-2l\ln\eta+2\eta. \qquad (6)$$

Можно показать, что для проводов, изогнутых по замкнутым гладким кривым, последний член в этом выражении исчезает. Для незамкнутых проводов отношение этого члена к сумме первых двух имеет порядок η/l. С другой стороны, для таких проводов погрешность метода Хоу, обусловленная влиянием концов провода, не ниже величин порядка η/l (²). Поэтому, не выходя за пределы точности метода Хоу, можно последний член в выражении (6) положить равным нулю и для незамкнутых проводов. Тогда

$$J=2\int_0^l [W(l_1)-V(l_1,0)]\,dl_1-2l\ln\eta. \qquad (7)$$

4. Подставляя (7) в (1), представим α_{kk} в виде:

$$\alpha_{kk}=\frac{2}{\varepsilon l^2}\int_0^l \Big[W(l_1)-V(l_1,0)\Big]dl_1-\frac{2}{\varepsilon l}\ln g, \qquad (8)$$

где g — среднее геометрическое расстояние периметра поперечного сечения провода от самого себя, определяемое равенством:

$$\ln g=\frac{1}{\lambda^2}\iint_{\lambda\,\lambda}\ln\eta\,d\lambda'\,d\lambda''.$$

Первый член в выражении (8) зависит только от формы и размеров оси провода. Второй член определяется формой и размерами сечения провода. Таким образом, определение потенциального коэффициента α_{kk} распадается на две самостоятельные задачи, причем первая имеет решение, определяемое, независимо от формы сечения провода, только уравнением его оси, а вторая решается одинаково для всех проводов с одинаковой формой сечения.

Отметим, что для круглого провода, для которого кривая λ является окружностью, $g=r$, где r — радиус провода.

5. Пользуясь формулой (8), для провода, изогнутого по дуге окружности, мы нашли:

$$\alpha_{kk}=\frac{2}{\varepsilon l}\left(\ln\frac{8R}{g}+\frac{4}{\theta}I\right),$$

где $l=\theta R$ — длина, R — радиус оси провода, I — функция угла θ, значения которой даны в статье ([3]). В частности, для круглого кольца круглого сечения $I=0$, $l=2\pi R$, $g=r$ и

$$\alpha_{kk}'=\frac{1}{\pi R\varepsilon}\ln\frac{8R}{r}. \tag{9}$$

Распределение электричества по поверхности кольца резко неравномерно, и при $R=10\,r$ поверхностная плотность электричества на внутренней стороне кольца более чем вдвое превышает поверхностную плотность на его наружной стороне.

Несмотря на это, сравнение (9) с точным выражением, найденным для этого случая Н. А. Булгаковым ([4]), показывает, что формула (9) дает α_{kk} с точностью до членов порядка $(r/2R)^2$. Для $R=10\,r$ погрешность составляет только 1,15%. Это обстоятельство подтверждает допустимость предположений, лежащих в основе метода Хоу, для проводов, образующих замкнутые контуры.

Поступило
14 X 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. А. Цейтлин, Тр. Воен. электротехн. академии, № 7 (1944). [2] F. W. Grover, Sci. Pap. Bur. Stand., **22**, 569 (1927—1928). [3] Л. А. Цейтлин, Тр. Лен. индустр. ин-та, № 5 (1937). [4] Н. А. Булгаков, ЖРФХО, **30**, 3 (1898).