Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 2

ФИЗИКА

Действительный член Академии Наук БССР Н. С. АКУЛОВ

О ДИФФУЗИИ ТРАНСМУТИРУЮЩИХ ЧАСТИЦ

В предыдущем сообщении ([1]) мы рассмотрели процесс диффузии трансмутирующих частиц, т. е. таких частиц, которые, взаимодействуя со средой, где они диффундируют, могут превращаться в частицы с новыми свойствами. В ходе диффузии эти новые частицы снова могут трансмутировать. Если после ряда трансмутаций мы получаем частицы исходного типа, процесс будет циклическим или цепным, в противном случае — консекутивным.

Целью настоящего сообщения является расчет скорости образующихся таким образом трансмутирующих друг в друга диффузионных волн.

Как мы показали ранее, процесс диффузии трансмутирующих частиц в общем случае описывается системой интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u_i(\alpha)}{\partial t} = D_i(\alpha)\,\Delta u_i(\alpha) + \sum_j \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} a_{ij}(\alpha, \alpha')\, u_j(\alpha')\, d\alpha', \tag{1}$$

где u_i — концентрации, а a_{ij} — компоненты трансмутационной матрицы,

$$a_{ij} = [\varkappa_{ij}(\alpha, \alpha') - \delta_{ij}\delta(\alpha, \alpha')]\, w_{ij}(\alpha, \alpha'). \tag{2}$$

Здесь $w_{ij}(\alpha, \alpha')$ есть вероятность того, что частица типа i, обладающая энергией $E = \alpha$, перейдет в частицу j-го типа, обладающую энергией $E = \alpha'$. В общем случае α может характеризовать какой-либо иной физический параметр, который может практически непрерывно меняться. Таким образом, каждой частице данного типа сопоставляется некоторый сплошной спектр $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$.

Коэффициент размножения $\varkappa_{ij}(\alpha, \alpha')$ дает число новых частиц типа j, α' взамен одной погибшей частицы типа i, α.

Величина $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Функция Дирака $\delta(\alpha, \alpha')$ характеризуется соотношением

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(\alpha, \alpha')\, \delta(\alpha, \alpha')\, d\alpha' = F(\alpha, \alpha), \tag{3}$$

где $F(\alpha, \alpha')$ — любая функция, не имеющая разрывов в точке $\alpha = \alpha'$. При этом $\alpha_1 \leqslant \alpha' \leqslant \alpha_2$.

Таким образом, второй член в скобках в (2) равняется единице при $i = j$, и $\alpha = \alpha'$ характеризует гибель трансмутирующей частицы.

Ранее нами был разработан метод решения этой системы уравнений для случая замкнутого пространства с заданными условиями на границах. В этом сообщении мы рассматриваем случай неограниченного пространства и даем решение проблемы расчета скорости распространения диффузионных волн, непрерывно преобразующихся в ходе процесса в волны частиц других типов.

Переходя, как это было показано ранее, от сплошного спектра к практически эквивалентному спектру, состоящему из весьма близко лежащих линий, мы можем заменить интегралы в (1) суммами и, таким образом, получаем

$$\frac{\partial u_p}{\partial t} = D_p \Delta u_p + \sum_q a_{pq} u_q. \tag{1'}$$

Пусть $u_{0p}(x, y, z, t)$ есть решение уравнения

$$\frac{\partial u_{0p}}{\partial t} = D_p \Delta u_{0p}, \tag{4}$$

относящееся к неограниченной среде.

Это решение, как известно, имеет следующий вид:

$$u_{0p}(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi D_p t})^3} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_p(\lambda, \mu, \nu)\, e^{-\frac{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2+(z-\nu)^2}{4 D_p t}}\, d\lambda d\mu d\nu, \tag{5}$$

где $f(x, y, z)$ — концентрация p-частиц при $t=0$.

Ограничимся случаем $D_p = D = \text{const}$ и $f_p = f_q$ $(p, q = 1, 2, \ldots, N)$ и будем искать решение (1') в форме

$$u_p = c_p u_{0p} e^{kt}, \tag{6}$$

где c_p — постоянные коэффициенты, определяемые из начальных условий.

После подстановки (6) в (1') вследствие (4) мы получаем систему линейных уравнений, которые совершенно аналогичны системе уравнений, характеризующих развитие цепного процесса в пространстве, где никакой диффузии нет.

В качестве условий совместимости этих уравнений имеем:

$$A(k) = \begin{vmatrix} -k + a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -k + a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -k + a_{33} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Если индексы p, q меняются от 1 до N, условие (7) дает N корней. Пусть трансмутационная матрица имеет такое значение компонентов, при котором только один из этих корней положителен. Мы имеем тогда систему вблизи границ, характеризующих начало „области самоускорения".

Это приводит к следующим следствиям.

Вообще говоря, решение (1'), согласно (6) и (7), имеет вид:

$$u_p(x, y, z, t) = u_{0p}(x, y, z, t) \sum_i c_{pi} e^{k_i t}. \tag{8}$$

Здесь коэффициенты определяются из начальных условий, которые могут быть представлены в следующем виде:

$$(u_p)_{t=0} = f(x, y, z),$$
$$\left(\sum_i c_{pi} e^{k_i t}\right)_{t=0} = \sum_i c_{pi} = 1. \tag{9}$$

При малых t, в частности при $t = 0$, мы должны учесть все члены c_{pi} суммы. Однако при больших t все члены с отрицательными

k_i становятся исчезающе малыми. При наличии одного положительного k^*, который пусть соответствует, например, индексу 1, мы получаем один член c^*_{p1}. Величина k^*_1 определяется, как мы указали ранее ([1]), следующим соотношением:

$$k^*_1 = \frac{A(0)}{\sum A_{ii}(0)}, \tag{10}$$

где $A_{ii}(0)$ — главные миноры детерминанта $A(0)$.

Мы видим таким образом, что амплитуда диффузионной волны меняется не только вследствие диффузии, как это выражено уравнением (5), но также и вследствие трансмутаций. За счет этого процесса она уменьшается в отношении $c^*_{pi} / \sum_i c_{pi}$. Однако, после того как при больших t эти изменения в амплитуде произошли, в дальнейшем эффект трансмутации никаких новых изменений в отношении амплитуды диффузионных волн не вызывает (правило трансмутационной стационарности).

Рассмотрим теперь в целях определения скорости распространения диффузионных волн одномерную задачу, когда в начальный момент времени $t=0$ частицы различных типов в концентрациях u_{p0} сосредоточены в плоско-параллельном слое толщиной h в плоскости yz.

Преобразуя обычным способом (5), мы получаем тогда

$$u_p(x, t) = u_{0p}(x, t) \sum_i c_{pi} e^{k_i t}, \tag{11}$$

где $u_{0p}(x, t) = \dfrac{u_p^0 h}{2\sqrt{\pi D t}}\, e^{-x^2/4Dt}$.

Отсюда для больших t

$$u_p(x, t) = u_{0p}(x, t)\, c^+_{p1}\, e^{k^*_1 t}. \tag{12}$$

Условие $u_p(x, t) / u_p^0 h = c_p^0 = \mathrm{const}$ дает:

$$\frac{x^2}{4Dt} - \ln 2\sqrt{\pi D t} \sum_i c_{pi} e^{k_i t} = 0. \tag{13}$$

Отсюда для скорости распространения $w_p = x/t$ имеем:

$$w_p = \sqrt{4D - t^{-1} \ln 2\sqrt{\pi D t} \sum_i c_{pi} \exp k_i t}. \tag{14}$$

Мы видим таким образом, что даже в случае, когда $D_p = D$, скорость распространения диффузионной волны все еще определяется не только коэффициентом диффузии, но и амплитудами диффузионных волн c_{pi}.

Однако при достаточно больших t, когда второй член под знаком корня в (14) становится сколь угодно малым, в пределе мы получаем:

$$w_p = w = 2\sqrt{Dk^*} \qquad (p = 1, 2, \ldots, N). \tag{15}$$

Эта формула для скорости трансмутирующих диффузионных волн напоминает формулу для обыкновенных диффузионных волн, впервые в результате достаточно строгого анализа полученную А. Н. Колмогоровым, И. Г. Петровским и Н. С. Пискуновым ([2])

$$w = 2\sqrt{Da}. \tag{16}$$

Формула (16) получается из (15) как частный случай, когда трансмутационная матрица вырождается в один член $a_{11} = a$, и вместо нескольких типов трансмутирующих частиц мы имеем лишь один тип частиц.

Формула (15) показывает, что если коэффициенты D диффузии трансмутирующих частиц одинаковы, то все волны, несмотря на эффект трансмутации, распространяются с одинаковой скоростью (при больших t).

Амплитуды диффундирующих волн относятся при этом как

$$u_1^0 c_1^* : u_2^0 c_2^* : u_3^0 c_3^* : \ldots, \tag{17}$$

где c_i^* — коэффициенты в (8) при $e^{k_i t}$, а u_p^0 — начальные концентрации.

Если в исходном состоянии эти амплитуды u_i^0 были одинаковы, то для больших t они оказываются в результате трансмутации измененными и при этом (с точностью до общего множителя) равными концентрации c_i^* трансмутирующих частиц в пространстве, где никакой диффузии нет.

Иными словами, если наблюдатель движется в пространстве, где распространяются трансмутирующие диффузионные волны, со скоростью $w=2\sqrt{Dk^*}$, то (при больших t и $D_p=\text{const}$) явление для него будет протекать так, как в пространстве, где никакой диффузии не было, но имеются лишь одни трансмутации (правило трансмутационного переноса).

Рассмотрим в заключение следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial u_p}{\partial t}=D_p\Delta u_p+\Phi_p(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_N). \tag{18}$$

Для достаточно малых u_p получаем как первое приближение *

$$\frac{\partial u_p}{\partial t}=D_p\,\Delta u_p+\sum_q\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_q}\right)_0 u_q. \tag{19}$$

Вводя

$$a_{pq}=(\partial\Phi_p/\partial u_q)_{u_q\to 0}, \tag{20}$$

мы получаем систему уравнений типа (1').

Таким образом, подставляя в (7) и (11) значение (20), найдем w. Выражение (15) даст нам значение скорости распространения трансмутирующих диффузионных волн. Указанный метод, естественно, применим лишь в том случае, если $A(0)$, $A_{il}(0)$, не равны тождественно нулю.

Если мы имеем не один, а несколько положительных корней уравнения (7), мы можем за знак суммы в (8) вынести максимальный из положительных корней $k_{\max}$. При достаточно больших t сумма будет стремиться к единице и, таким образом, согласно (13), мы найдем:

$$w=2\sqrt{Dk_{\max}}, \tag{21}$$

где $k_{\max}$ — максимальный из корней уравнения (7).

Мы видим таким образом, что развитая теория позволяет установить все основные особенности, к которым приводит влияние эффекта трансмутаций на распространение диффузионных волн.

Поступило
21 II 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. С. Акулов, ДАН, **56**, № 7 (1947); Н. С. Акулов и Е. Свирина, Вестн. МГУ, № 2 (1948). [2] А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский и Н. С. Пискунов, Бюлл. МГУ, Математика и механика, в. 6, 2 (1937).

* При наличии свободного от u_q члена всегда возможна подстановка $u'=u+\beta$, приводящая к (19).