Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 9

ФИЗИКА

Д. ИВАНЕНКО и А. СОКОЛОВ

К ТЕОРИИ „СВЕТЯЩЕГОСЯ" ЭЛЕКТРОНА

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 25 II 1948)

1. Как было указано некоторое время тому назад [1], излучение электромагнитных волн электронами, движущимися в ускорителях типа бетатрона или синхротрона, должно достигать заметной величины при энергиях порядка 10^8 eV. Предсказанное Д. Иваненко и И. Померанчуком излучение было недавно обнаружено визуально [2]. Новое излучение, обладающее специфическими особенностями, разумно назвать эффектом „светящегося" электрона ввиду того, что максимум интенсивности при указанных энергиях, реально наиболее важных случаях,приходится на область видимого света.

Несмотря на то, что спектр „светящегося" электрона исследовался рядом авторов [3–4], до сих пор не были получены замкнутые формулы, пригодные во всей интересующей нас области спектра.

2. Так как при движении электрона по окружности излучение происходит главным образом за счет нормального ускорения, можно ограничиться случаем равномерного вращения. В случае вращения по окружности радиуса a со скоростью $v=\beta c$ электрона глобальное излучение энергии равно

$$w=\frac{2}{3}\;\frac{e^2\beta^4 c}{a^2(1-\beta^2)^2}\,. \tag{1}$$

Длина волны при дипольном излучении связана с частотой вращения $\omega=v/a$ соотношением

$$\lambda=2\pi c/\omega \tag{2}$$

или

$$2\pi a/\lambda=v/c=\beta.$$

Так как интенсивности высших мультиполей номера n имеют порядок интенсивности дипольного излучения ($n=1$), умноженной на величину

$$(2\pi a/\lambda)^{n-1}=\beta^{n-1}, \tag{3}$$

то при нерелятивистских скоростях мы можем ограничиться дипольным излучением.

Однако в ультрарелятивистском случае, когда $\beta\approx 1$, распределение интенсивности излучения в зависимости от n требует дополнительного исследования, так как разложение (3) теряет смысл.

Для вектора потенциала электромагнитного поля, создаваемого электроном в волновой зоне, в точке со сферическими координатами (r, θ, φ) имеем:

$$\vec{A} \simeq \frac{e}{cr} \int \vec{v}(t') \left(\delta\left(t' - t + \frac{r}{c} - \frac{a \sin\theta \cos(\varphi - \omega t')}{c}\right)\right) dt'. \tag{4}$$

Разлагая δ-функцию по величине $\frac{a \sin\theta \cos(\varphi - \omega t')}{c}$, мы получаем для определения полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ ряд Фурье, представляющий собой сумму гармоник с частотами излучения $n\omega$.

Определяя затем вектор Пойнтинга, находим энергию излучения n-й гармоники в единицу времени внутри телесного угла $d\omega$:

$$dw_n = \frac{e^2 n^2 \beta^2 c}{2\pi a^2} [\operatorname{ctg}^2 \theta J_n^2 (\beta n \sin\theta) + \beta^2 J_n'^2 (\beta n \sin\theta)]\, d\omega \tag{5}$$

в согласии со старым результатом Шотта ([5]), полученным, однако, более сложным путем.

Отсюда суммированием по номерам гармоник получается угловое распределение глобального излучения *, сосредоточенного практически в плоскости орбиты.

С другой стороны, интегрируя (5) по телесному углу $d\omega$, мы получаем точную формулу, дающую распределение интенсивности излучения по номерам гармоник ([5]):

$$w_n = \frac{e^2 \beta c n}{a^2} \left\{2\beta^2 J'_{2n}(2n\beta) - (1 - \beta^2) \int_0^{2n\beta} J_{2n}(x)\, dx\right\}. \tag{6}$$

Формула (6) весьма неудобна, потому что номер гармоники входит как в качестве аргумента, так и в порядок бесселевой функции.

В предыдущих работах было получено лишь довольно грубое приближение к (6), не дающее возможности проанализировать зависимость w_n от номера гармоники на всем интервале частот.

3. Для того чтобы найти приближение к (6), пригодное на всем интервале частот, воспользуемся особым методом решения линейных уравнений второго порядка вида:

$$\psi'' - f(x)\psi = 0. \tag{7}$$

Приближенный метод Бриллуэна, Вентцеля и Крамерса, развитый в квантовой механике, дает решение (7) в виде:

$$\psi = \sqrt{\frac{1}{-z'}}\, (Ae^z + Be^{-z}), \tag{8}$$

где $z = \int_{x_0}^{x} \sqrt{f(x)}\, dx$ и x_0 является единственным корнем в рассматриваемом интервале, т. е. $f(x_0) = 0$.

Однако (8) дает хорошее приближение лишь для больших значений z и совершенно непригодно вблизи точки x_0.

---

* См. ([1]), а также ([3]); в последней работе приводится приближенное, но достаточно точное выражение.

Как было показано, например, одним из нас ([6])*, решение уравнения (7), равномерно пригодное во всей области изменения x, включая особую точку x_0, следует искать в форме:

$$\psi=\sqrt{\frac{z}{-z'}}\{AI_s(z)+BK_s(z)\}, \tag{9}$$

которая для больших z переходит в (8). Кроме того, мы можем подобрать порядок s цилиндрических функций таким образом, чтобы (9) оставалось справедливым также вблизи особой точки x_0.

В частности, если функция $f(x)$ около особой точки имеет полюс первого порядка, то величину s следует положить равной $1/3$.

На основании этой теоремы находим следующее асимптотическое выражение при значениях x, близких к $2n$, для цилиндрической функции при больших значениях $2n$ $(x=2n(1-\xi))$; $0\leqslant\xi\leqslant 1$**

$$J_{2n}(x)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2\xi}{3}}\,K_{1/3}\left(\frac{2n}{3}(2\xi)^{3/2}\right). \tag{10}$$

Отсюда находим искомое выражение для спектрального распределения излучения „светящегося“ электрона:

$$w_n\cong\frac{e^2c}{a^2}\left[\frac{4\xi n}{\pi\sqrt{3}}K_{2/3}\left(\frac{2n}{3}(2\xi)^{3/2}\right)-\frac{2\xi n}{\pi\sqrt{3}}\int\limits_{2n/3\,(2\xi)^{3/2}}^{\infty}K_{1/3}(y)\,dy\right], \tag{11}$$

где величина $\sqrt{2\xi}=\sqrt{2(1-\beta)}\approx mc^2/E$ равняется отношению собственной энергии электрона к полной его энергии.

Здесь следует различать два крайних случая:

A) $$n\ll\frac{3}{2}(E/mc^2)^3. \tag{12}$$

Тогда наша формула (11) переходит в выражение***:

$$w_n=\frac{e^2c}{a^2}\,\frac{3^{1/6}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)n^{1/3}}{\pi}. \tag{13}$$

В другом частном случае, когда n крайне велико

B) $$n\gg\frac{3}{2}(E/mc^2)^3, \tag{14}$$

мы получаем из той же нашей общей формулы (11) выражение, характеризующее быстроту убывания энергии крайне высоких гармоник:

$$w_n=\frac{e^2c}{a^2}\,\frac{n^{1/2}\xi^{1/4}}{2^{3/4}\sqrt{\pi}}\,e^{-2n/3\,(2\xi)^{3/2}}. \tag{15}$$

---

* Как нам любезно сообщил П. Краснушкин, недавно им был развит аналогичный метод при исследовании прохождения волн сквозь потенциальные барьеры.

** Асимптотическое поведение бесселевых функций исследовалось также Лангером ([7]) и Фоком ([8]).

*** См. также ([4]). Пропорциональность $w_n \div n^{1/3}$ была обнаружена Л. Арцимовичем и И. Померанчуком ([4]).

Проверкой пригодности общего выражения (11) является определение глобальной энергии всего спектра, получаемое суммированием по всем номерам гармоник, сводящееся фактически к интегрированию по n

$$w=\int_0^\infty w_n dn=\frac{1}{6}\,\frac{e^2c}{a^2\xi^2}\,.$$

Это значение в ультрарелятивистском случае совпадает с точной формулой (1)

Таким образом, полученное выше равномерно пригодное во всей интересующей нас области замкнутое выражение для энергии n-й гармоники (11) действительно оправдывает себя и, очевидно, может быть с пользой применено в теории „светящегося" электрона.

Существенное возраженне против самой возможности излучения возникло в нашей прежней дискуссии с Я. П. Терлецким и основывалось на взаимном гашении волн от отдельных электронов пучка; однако, как нами было тогда же выяснено, флуктуации в распределении электронов приводят к реальному излучению ([3—4]).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
и Сельскохозяйственная академия
им. К. А. Тимирязева

Поступило
25 II 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Иваненко и И. Померанчук, ДАН, **44**, 315 (1944); Phys.Rev., **65**, 343 (1944). [2] H. C. Pollock, F. R. Elder, A. H. Gurewitsch and R. V. Langmuir, Phys. Rev., **71**, 829 (1947); J. P. Blewett, ibid., **69**, 87 (1946). [3] L. Arzimovich and I. Pomeranchuk, J. of Phys., **9**, 267 (1945). [4] L. Schiff, Rev. Sci. Instr., **17**, 6 (1946). [5] G. Schott, Electromagnetic Radiation, Cambridge, 1912, p. 109. [6] А. Соколов, Вестник МГУ, № 4, 77 (1947). [7] R. Langer, Trans. Am. Math. Soc., **33**, 23 (1931); **34**, 447 (1932). [8] В. Фок, ДАН, **1**, 97 (1934).