Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 9

МАТЕМАТИКА

И. А. ЭЗРОХИ

ОБЩИЕ ФОРМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ СО СЧЕТНЫМ БАЗИСОМ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 24 I 1948)

Многие авторы занимались вопросом об общей форме линейной операции, отображающей одно пространство типа B в другое (Г. М. Фихтенгольц, Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, И. М. Гельфанд и др.). Во всех случаях оба или одно из пространств предполагались конкретными.

В настоящей заметке дается общая форма линейной операции из любого пространства типа B в любое пространство типа B со счетным базисом и наоборот.

Если в пространстве Z типа B существует такая последовательность элементов $\{z_i\} \subset Z$, что $\psi_i(z_i)=1$, $\psi_i(z_j)=0$ и каждый элемент $z \in Z$ может быть представлен в форме

$$z=\sum_{i=1}^{\infty} z_i\psi_i(z), \tag{1}$$

где ряд сходится по норме пространства Z, то говорят, что пространство Z обладает счетным базисом ([1]).

Впредь под символом Z мы и будем разуметь пространство типа B со счетным базисом, сохраняя за z_i и $\psi_i(z)$ их указанные значения. Сверх того, будем предполагать, что

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} z_i\psi_i(z) \right\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n+m} z_i\psi_i(z) \right\| {}^{*} \quad (m>0). \tag{2}$$

X всегда будет обозначать пространство типа B.

Теорема 1. *Общая форма линейной операции $z=u(x)$, преобразующей пространство X в пространство Z, имеет вид*

$$z=u(x)=\sum_{i=1}^{\infty} z_i f_i(x), \tag{3}$$

---

* Последующие теоремы имеют место и без этого предположения, за исключением оценок норм рассматриваемых операций. Пространства c, l^p (при $p \geqslant 1$) этим свойством обладают.

где последовательность линейных функционалов $\{f_i\} \subset X^*$ такова, что для каждого элемента $x \in X$ предыдущий ряд сходится по норме пространства Z.

При этом

$$\| u \| = \sup_{\|x\| \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} z_i f_i(x) \right\| = \lim_{n \to \infty} \sup_{\|x\| \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} z_i f_i(x) \right\|.$$

Доказательство. Рассмотрим операцию (3); аддитивность ее очевидна. Так как операция $u(x)$ является слабым пределом последовательности линейных операций $\left\{ u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} z_i f_i(x) \right\}$, $\|u_n\| = \sup \left\| \sum_{i=1}^{n} z_i f_i(x) \right\|$, то она линейна и

$$\| u \| \leq \varliminf_{n \to \infty} \sup_{\|x\| \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} z_i f_i(x) \right\| < +\infty. \tag{4}$$

Наоборот, пусть дана произвольная линейная операция, отображающая пространство X в Z. Тогда, в силу (1), имеем:

$$z = u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i \psi_i(z) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i \psi_i(u(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i f_i(x) \quad \text{для} \quad z = u(x) \in Z,$$

где $f_i = u^*(\psi_i)$, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} z_i f_i(x)$ сходится по норме пространства Z для каждого $x \in X$. Так как при этом $\| u(x) \| = \lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} z_i f_i(x) \right\|$, то, в силу (2), $\left\| \sum_{i=1}^{n} z_i f_i(x) \right\| \leq \| u(x) \|$ для каждого $x \in X$. Следовательно,

$$\varlimsup_{n \to \infty} \sup_{\|x\| \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} z_i f_i(x) \right\| \leq \| u \|. \tag{5}$$

Из неравенств (4) и (5) следует равенство

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{\|x\| \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} z_i f_i(x) \right\| = \| u \|.$$

Теорема 2. *Общая форма линейной операции $x = v(z)$, отображающей пространство Z в пространство X, имеет вид*

$$x = v(z) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \psi_i(z), \tag{6}$$

где последовательность $\{x_i\} \subset X$ такова, что

$$\sup_{n \geq 1} \sup_{\|z\| \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \psi_i(z) \right\| = M < +\infty. \tag{7}$$

При этом

$$\| v \| = \sup_{\| z \| \leqslant 1} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} x_i \psi_i(z) \right\| = \lim_{n\to\infty} \sup_{\| z \| \leqslant 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \psi_i(z) \right\| .$$

Доказательство. Пусть условие (7) выполняется. Тогда утверждаем, что последовательность линейных операций $\left\{ v_n(z) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \psi_i(z) \right\}$,

$\| v_n \| = \sup\limits_{\| z \| \leqslant 1} \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \psi_i(z) \right\|$ слабо сходится. Действительно, для точки

$z = \sum\limits_{i=1}^{\infty} z_i \psi_i(z) \in Z$

$$\| v_{n+m}(z) - v_n(z) \| = \left\| \sum_{i=1}^{n+m} x_i \psi_i(z) - \sum_{i=1}^{n} x_i \psi_i(z) \right\| = \left\| \sum_{i=n+1}^{n+m} x_i \psi_i(z) \right\| . \tag{8}$$

Последнее выражение под знаком нормы является значением операции v_{n+m} в точке $\bar{z}_n = \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} z_i \psi_i(z)$, стало быть,

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{n+m} x_i \psi_i(z) \right\| \leqslant \| v_{n+m} \| \cdot \| \bar{z}_n \| \leqslant M \| \bar{z}_n \| . \tag{9}$$

Так как из сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} z_i \psi_i(z)$ вытекает, что $\| \bar{z}_n \| < \varepsilon$ для всех $n \geqslant N_\varepsilon$, то из (8) и (9) следует $\| v_{n+m}(z) - v_n(z) \| < M\varepsilon$ $(z \in Z)$ при всех $n \geqslant N_\varepsilon$, $m = 1, 2, \ldots$ Значит, операция

$$x = v(z) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \psi_i(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \psi_i(z) = \lim_{n\to\infty} v_n(z)$$

линейна и

$$\| v_n(z) \| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \sup_{\| z \| \leqslant 1} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} x_i \psi_i(z) \right\| < +\infty . \tag{10}$$

Пусть теперь $x = v(z)$ будет произвольной линейной операцией, отображающей пространство Z в X. Тогда, в силу (1), будем иметь

$$x = v(z) = v\left(\sum_{i=1}^{\infty} z_i \psi_i(z) \right) = \lim_{n\to\infty} v\left(\sum_{i=1}^{n} z_i \psi_i(z) \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} v(z_i) \psi_i(z) = \sum_{i=1}^{\infty} v(z_i) \psi_i(z).$$

Полагаем $x_i = v(z_i)$ для каждого $i = 1, 2, \ldots$ Тогда получим, что

$$x = v(z) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \psi_i(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \psi_i(z),$$

и, значит,

$$\sup_{n\geqslant 1}\ \sup_{\|z\|\leqslant 1}\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\psi_i(z)\right\| < +\infty.$$

Так как, в силу (2), для каждого $z\in Z$ и $n=1, 2, \ldots$

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\psi_i(z)\right\| = \left\|v\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\psi_i(z)\right)\right\| \leqslant \|v\|\cdot\left\|\sum_{i=1}^{n} z_i\psi_i(z)\right\| \leqslant \|v\|\cdot\|z\|,$$

то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sup_{\|z\|\leqslant 1}\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\psi_i(z)\right\| \leqslant \|v\|. \qquad (11)$$

Из неравенств (10) и (11) следует равенство

$$\|v\| = \lim_{n\to\infty}\ \sup_{\|z\|\leqslant 1}\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\psi_i(z)\right\|.$$

Из теорем 1 и 2 непосредственно могут быть выведены: 1) общая форма линейной операции из пространства X в пространство l^p (Л. В. Канторович и Б. З. Вулих ([2]) для $p\geqslant 1$, И. М. Гельфанд ([4]) для $p=1$); 2) общая форма линейной операции, отображающей пространство l^p в пространство X (Л. В. Канторович ([3]) для $p\geqslant 1$, И. М. Гельфанд ([4]) для $p=1$); 3) общая форма линейной операции, отображающей пространство X в пространство c и, наоборот, пространство c в пространство X.

Из последнего, в свою очередь, легко может быть получена: 4) общая форма линейной операции, отображающей пространство c в слабо полное (по Banach'у) пространство X (И. М. Гельфанд ([4])) *.

Поступило
24 I 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932. [2] L. Kantorovitch et B. Vulich, Compositio Mathematica, 5, 119 (1937). [3] Л. В. Канторович, Матем. сб., 7 (49) : 2 (1940). [4] И. М. Гельфанд, Матем. сб., 4 (46) : 2 (1938).

* Заметим, что указанная И. М. Гельфандом общая форма линейной операции, отображающей пространство c в слабо полное пространство X, нуждается в небольшом исправлении, именно, надлежит добавить еще член вида $x_0 \lim\limits_{i\to\infty} \zeta_i$, где $\{\zeta_i\}\in c$, $x_0\in X$. (Аналогичное замечание можно сделать относительно данной им общей формы вполне непрерывной операции, отображающей пространство c в пространство X.)