Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 9

МАТЕМАТИКА

С. НИКОЛЬСКИЙ

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОГО ПРЕДЛОЖЕНИЯ С. Н. БЕРНШТЕЙНА О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 21 I 1948)

Обозначим для удобства через $H^{(p)}$ класс функций $f(x)$, заданных на вещественной оси и имеющих: 1) при $p>0$ нецелом производную порядка $r=[p]$, удовлетворяющую условию Липшица степени $\alpha=p-[p]$

$$|f^{(r)}(x+h)-f^{(r)}(x)|\leqslant M|h|^{\alpha} \qquad (0<\alpha<1)$$

и 2) при $p>0$ целом непрерывную производную порядка $r=p-1$, удовлетворяющую условию гладкости

$$|f^{(r)}(x+h)-2f^{(r)}(x)+f^{(r)}(x-h)|\leqslant M|h|.$$

Здесь M зависит от $f\in H^{(p)}$, но не зависит от x и h.

Условимся говорить, что функция $f(x, y)$, заданная для всех x и y, принадлежит по x к классу $(H^{(p)})$ равномерно относительно y, если она, рассматриваемая как функция от x, принадлежит к $(H^{(p)})$ и при этом константа M может быть взята не зависящей от y.

Теорема. *Пусть функция $f(x, y)$, определенная и ограниченная на всей плоскости x, y, принадлежит по x к классу $(H^{(p)})$ $(p>0)$ равномерно относительно y и по y — к классу $(H^{(q)})$ $(q>0)$ равномерно относительно x.*

Пусть, далее, $p\leqslant q$, $p=r+\alpha$ $(0<\alpha\leqslant 1)$, где r — целое и l — целое, удовлетворяющее неравенству $0<l<r$.

Тогда:

1) *Частная производная $\frac{\partial^l f}{\partial x^l}$ принадлежит по y к классу $(H^{(k_*)})$, где $k_*=q\left(1-\frac{l}{p}\right)$. Иначе говоря, существует для всех x и y смешанная частная производная $\frac{\partial^{l+k} f}{\partial x^l\, \partial y^k}$, принадлежащая по y к $(H^{(\gamma)})$ равномерно относительно x, где**

* $\frac{\partial^{l+k} f}{\partial x^l\, \partial y^k}$ по x принадлежит к $(H^{(\delta)})$ равномерно относительно y, где $\delta=\frac{\gamma p}{q}$.

$$k=\begin{cases} [k_*], & \text{если } k_* \text{ нецелое}, \\ k_*-1, & \text{если } k_* \text{ целое}, \end{cases} \qquad (1)$$

$$\gamma=k_*-k \qquad (0<\gamma\leqslant 1).$$

2) *Существует функция $f(x, y)$, удовлетворяющая условиям теоремы, такая, что для некоторого x частная производная $\frac{\partial^l f}{\partial x^l}$ не принадлежит по y ни к какому классу $(H^{(k_1)})$ при любом $k_1>k_*$.*

Первое утверждение теоремы (достаточное условие) при $p=q$ было доказано С. Н. Бернштейном ([1,2]).

На языке наших обозначений оно гласит: если ограниченная функция $f(x, y)$ принадлежит по любой из переменных x и y к классу $(H^{(p)})$ равномерно относительно другой переменной, то производная $\frac{\partial^l f}{\partial x^l}$ $(0<l<p)$ принадлежит по y к классу $(H^{(p-l)})$ равномерно относительно x.

Доказательство первого утверждения базируется на следующем предложении С. Н. Бернштейна* (см. ([2])).

Если функция $f(x, y)$ по x принадлежит к классу $(H^{(p)})$ и по y — к классу $(H^{(q)})$**, то существует константа C такая, что наилучшее приближение $A_{mn}(f)$ функции f при помощи целой функции $g_{mn}(x, y)$ степени m и n соответственно относительно x и y удовлетворяет неравенству

$$A_{mn}(f)=\sup_{x,\, y}|f(x, y)-g_{mn}(x, y)|\leqslant C\left(\frac{1}{m^p}+\frac{1}{n^q}\right)$$
$$(m>0, \quad n>0). \qquad (2)$$

Положим $n_i=2^i$ $(i=1, 2, \ldots)$ и $m_i^p=n_i^q$; тогда вследствие (2)

$$f=g_{m_0 n_0}+\sum_{i=1}^{\infty}(g_{m_i n_i}-g_{m_{i-1} n_{i-1}}),$$

где

$$|g_{m_i n_i}-g_{m_{i-1} n_{i-1}}|\leqslant 2C\left(\frac{1}{m_{i-1}^p}+\frac{1}{n_{i-1}^q}\right)=\frac{4C}{n_{i-1}^q}=\frac{C_1}{n_i^q}.$$

Отсюда, если k определяется равенствами (1),

$$\frac{\partial^{l+k} f}{\partial x^l\,\partial y^k}=Q_0+\sum_{i=1}^{\infty}Q_i,$$

$$Q_0=\frac{\partial^{l+k} g_{m_0 n_0}}{\partial x^l\,\partial y^k}, \qquad Q_i=\frac{\partial^{l+k}}{\partial x^l\,\partial y^k}(g_{m_i n_i}-g_{m_{i-1} n_{i-1}}) \quad (i=1, 2, \ldots),$$

причем на основании неравенства Бернштейна для целых функций конечной степени

$$|Q_i|\leqslant m_i^l n_i^k\frac{C_1}{n_i^q}=\frac{C_1}{n_i^{k_*-k}}=\frac{C_1}{n_i^{\gamma}} \qquad (0<\gamma\leqslant 1).$$

---

* Я независимо доказал это предложение в случае периодической функции $f(x, y)$.

** Добавление „равномерно относительно x или y“ мы здесь и в дальнейшем опускаем.

Поэтому

$$\left|\frac{\partial^{l+k} f}{\partial x^l \partial y^k} - Q_0 - \sum_{i=1}^{\mu} Q_i\right| \leqslant C_1 \sum_{i=\mu+1}^{\infty} \frac{1}{2^{\gamma i}} < \frac{C_2}{2^{\gamma\mu}}, \tag{3}$$

и, так как $R_\mu = Q_0 + \sum\limits_{i=1}^{\mu} Q_i$ относительно y есть целая функция степени $n_\mu = 2^\mu$, то наилучшее приближение функции $\frac{\partial^{l+k} f}{\partial x^l \partial y^k}$, рассматриваемой как функция от y с параметром x, при помощи целой функции (от y) степени 2^μ удовлетворяет неравенству

$$A_{2^\mu}\left(\frac{\partial^{l+k} f}{\partial x^l \partial y^k}\right) \leqslant \frac{C_2}{2^{\gamma\mu}} \qquad (\mu > 0),$$

из которого следует

$$A_n\left(\frac{\partial^{l+k} f}{\partial x^l \partial y^k}\right) \leqslant \frac{C_3}{n^\gamma} \qquad (n > 1) \tag{4}$$

равномерно относительно x.

Заметим еще, что из ограниченности f следует ограниченность $g_{m_0 n_0}$ и Q_0 и, таким образом, ограниченность $\frac{\partial^{l+k} f}{\partial x^l \partial y^k}$. В таком случае из (4) следует, что $\frac{\partial^{l+k} f}{\partial x^l \partial y^k}$ по y принадлежит к $(H^{(\gamma)})$.

Функция $f(x, y)$, фигурирующая во второй части теоремы, при l и k четных может быть определена так*:

$$f(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\nu q}} \cos 3^{\frac{q}{p}\nu} x \cos 3^\nu y. \tag{5}$$

Очевидно, если $q = s + \beta$ $(0 < \beta \leqslant 1)$, где s — целое,

$$\frac{\partial^s f}{\partial y^s} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\nu\beta}} \cos 3^{\frac{q}{p}\nu} x \cos\left(3^\nu y + \frac{s\pi}{2}\right) = \sigma_\mu + \rho_\mu,$$

$$|\rho_\mu| = \left|\sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} \frac{1}{3^{\nu\beta}} \cos 3^{\frac{q}{p}\nu} x \cos\left(3^\nu y + \frac{s\pi}{2}\right)\right| < \frac{C}{3^{\mu\beta}}.$$

Отсюда легко получается неравенство

$$\left|A_n\left(\frac{\partial^s f}{\partial y^s}\right)\right| \leqslant \frac{C_1}{n^\beta} \qquad (n > 1)$$

равномерно относительно x, и таким образом, $\frac{\partial^s f}{\partial x^s}$ принадлежит по y к $(H^{(\beta)})$, а $f \in (H^{(q)})$. Аналогично устанавливается принадлежность f

---

* Если одно из чисел l и k или оба нечетные, то в (5) надо $\cos 3^{\frac{q}{p}\nu} x$, $\cos 3^\nu y$ заменить соответственно на $\sin 3^{\frac{q}{p}\nu} x, \sin 3^\nu y$.

2 *

по x к $(H^{(p)})$

$$\frac{\partial^{l+k} f}{\partial x^l \partial y^k} = \pm \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\nu\gamma}} \cos 3^{\frac{p}{q}\nu} x \cos 3^{\nu} y.$$

При $x=0$ эта частная производная обращается в хорошо известный ряд, сумма которого принадлежит к $(H^{(\gamma)})$, но не к $(H^{(\gamma_1)})$, где $\gamma_1 > \gamma$.

Примечание 1. Теорема легко распространяется на функции с любым числом переменных. Например, если функция $f(x, y, z)$ принадлежит соответственно к $(H^{(p)})$, $(H^{(q)})$, $(H^{(r)})$ по x, y, z, то существует смешанная производная $\frac{\partial^{l+k+m} f}{\partial x^l \partial y^k \partial z^m}$ $\left(0 < l < p-1,\ k < q < l\frac{q}{p},\right.$ $\left. m < r < l\frac{r}{p} - k\frac{r}{q}\right)$, принадлежащая по z к $(H^{(\gamma)})$ $\left(\gamma = r - \frac{lr}{p} - \right.$ $\left. - k\frac{r}{q} - m\right)$.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
21 I 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени, Харьков, 1912. [2] С. Н. Бернштейн, ДАН, **59**, № 8 (1948).