Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 9

МАТЕМАТИКА

В. Л. ГОНЧАРОВ

ОБ ОДНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ СХЕМЕ ОБЩЕГО ВИДА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 2 II 1948)

В дальнейшем функциональными символами

$$U[F]=\int F(x)\,d\psi(x) \tag{1}$$

обозначаются суммы вида $\sum A_i F(a_i)$ (A_i и a_i — комплексные числа), интегралы, взятые по дугам или областям в комплексной плоскости, вида $\int F(x(s)+iy(s))\,\alpha(s)\,ds$ или $\int\int F(x+iy)\,\alpha(x,\ y)\,dx\,dy$ ($\alpha(s)$ и $\alpha(x,y)$ — комплексные функции), или, наконец, более общие интегральные образования типа Радона — Стильтьеса, взятые по заданным множествам в комплексной плоскости. Функционал (1) порождается некоторым распределением „комплексных масс" в рассматриваемой области; он имеет смысл (числовое значение) для любой функции $F(x)$, непрерывной в том множестве точек E, в котором распределены массы. Это множество E, естественно,— замкнутое; для наших целей достаточно также считать его ограниченным.

Предположим, что имеется $n+1$ таких функционалов:

$$U_m[F]=\int F(x)\,d\psi_m(x) \quad (m=0,\ 1,\ldots,n); \tag{2}$$

пусть E_m—соответствующие множества распределения масс. Множество $S=\sum\limits_0^n E_m$ замкнуто и ограничено. По поводу функционалов $U_m[F]$ мы сделаем допущение, что не существует многочлена $P_n(x)$ степени n (кроме $P_n(x)=0$), который их все обращал бы в нуль. Если бы такой многочлен $P_n(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n$ существовал, то из условий

$$U_m[P_n]=0 \qquad (m=0,\ 1,\ldots,n)$$

вытекало бы следствие

$$c_0U_m[1]+c_1U_m[x]+\ldots+c_nU_m[x^n]=0 \quad (m=0,1,\ldots,n),$$

и тогда определитель

$$\mathrm{U}_n=\|\,U_i[x^k]\,\|_{i,\,k=0,1,\ldots,n}=\int\ldots\int W(x_0,\ldots,x_n)\,d\psi_0(x_0)\ldots d\psi_n(x_n) \tag{3}$$

равнялся бы нулю, и обратно. Здесь через W обозначен определитель Вандермонда

$$W(x_0, \ldots, x_n) = \| 1, x_i, \ldots, x_i^n \| = \prod_{i<k}^{0, \ldots, n} (x_i - x_k).$$

Итак, мы допускаем, что

$$\mathbf{U}_n \neq 0. \tag{4}$$

Пусть некоторая функция $f(z)$ регулярна в области D, содержащей внутри множество S; пусть замкнутая кривая C лежит в области D и охватывает S; пусть, наконец, точка x расположена как угодно внутри C.

Рассмотрим интеграл

$$\mathbf{R}_n(f, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-x} \frac{\int \ldots \int \prod_{\nu=0}^{n} \frac{x - x_\nu}{z - x_\nu} W(x_0, \ldots, x_n)\, d\psi_0(x_0) \ldots d\psi_n(x_n)}{\int \ldots \int W(x_0, \ldots, x_n)\, d\psi_0(x_0) \ldots d\psi_n(x_n)} dz. \tag{5}$$

Выражение $\mathbf{R}_n(f, x)$ обладает следующими свойствами I и II.

$$\text{I.} \quad U_m[\mathbf{R}_n(f, x)] = 0 \qquad (m = 0, 1, \ldots, n). \tag{6}$$

В самом деле, принимая во внимание, что

$$W(x_0, \ldots, x_n) \prod_{\nu=0}^{n} (x - x_\nu) = W(x, x_0, \ldots, x_n),$$

мы получаем:

$$U_m[\mathbf{R}_n(f, x)] = \int \mathbf{R}_n(f, x)\, d\psi_m(x) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_C f(\ ) = \frac{\int \ldots \int \frac{W(x, x_0, \ldots, x_n)}{(z-x) \prod_{\nu=0}^{n} (z - x_\nu)} d\psi_m(x)\, d\psi_0(x_0) \ldots d\psi_n(x_n)}{\int \ldots \int W(x_0, \ldots, x_n)\, d\psi_0(x_0) \ldots d\psi_n(x_n)} dz.$$

Можно представить $(n+2)$-кратный интеграл в числителе дроби в виде следующего определителя $(n+2)$-го порядка, разнося по строчкам определителя $W(x, x_0, \ldots, x_n)$ двучленные множители в знаменателе и знаки интегралов:

$$\begin{vmatrix} \int \frac{d\psi_m(x)}{z-x} & \int \frac{x\, d\psi_m(x)}{z-x} & \ldots & \int \frac{x^{n+1} d\psi_m(x)}{z-x} \\ \int \frac{d\psi_0(x_0)}{z-x_0} & \int \frac{x_0\, d\psi_0(x_0)}{z-x_0} & \ldots & \int \frac{x_0^{n+1} d\psi_0(x_0)}{z-x_0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \int \frac{d\psi_n(x_n)}{z-x_n} & \int \frac{x_n\, d\psi_n(x_n)}{z-x_n} & \ldots & \int \frac{x_n^{n+1} d\psi_n(x_n)}{z-x_n} \end{vmatrix}.$$

Но в этом определителе совпадают две строки (отличающиеся одна от другой лишь переменными интегрирования x и x_m); значит, определитель равен нулю, откуда и следует нужное заключение.

II. Разность

$$\mathbf{P}_n(f, x) \equiv f(x) - \mathbf{R}_n(f, x)$$

представляет собой многочлен степени n.

Действительно, выражая $f(x)$ через интеграл Коши, легко переписать эту разность в виде

$$\mathbf{P}_n(f, x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C f(z) \frac{\int \cdots \int \frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n} (z - x_\nu) - \prod\limits_{\nu=0}^{n} (x - x_\nu)}{z - x} \frac{W(x_0, \ldots, x_n)}{\prod\limits_{\nu=0}^{n} (z - x_\nu)} d\psi_0(x) \ldots d\psi_n(x_n)}{\int \cdots \int W(x_0, \ldots, x_n)\, d\psi_0(x_0) \ldots d\psi_n(x_n)} dz, \tag{7}$$

и так как дробь

$$\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n} (z - x_\nu) - \prod\limits_{\nu=0}^{n} (x - x_\nu)}{z - x},$$

очевидно, есть многочлен степени n относительно x, то это же справедливо и по поводу всего рассматриваемого выражения.

Задача. *Найти многочлен* $\mathbf{P}_n(f, x) = \mathbf{P}_n(x)$ *степени* n *согласно условиям*

$$U_m[\mathbf{P}_n] = U_m[f] \qquad (m = 0, 1, \ldots, n) \tag{8}$$

и оценить разность (*остаточный член*)

$$\mathbf{R}_n(f, x) \equiv f(x) - \mathbf{P}_n(f, x). \tag{9}$$

При предположении $\mathbf{U}_n \neq 0$ задача имеет, очевидно, единственное решение. Из предыдущего изложения вытекает, что искомый многочлен представляется формулой (7). Формула (5) дает остаточный член.

Простейший частный случай интерполяции Ньютона получается, если положить

$$U_n[F] = F(a_m) \quad (m = 0, 1, \ldots, n;\ a_i \neq a_k \text{ при } i \neq k).$$

Тогда формулы (7) и (5) после небольших преобразований принимают вид:

$$\mathbf{P}_n(f, x) = \sum_{\nu=0}^{n} f(a_\nu) \frac{\Pi(x)}{(x - a_\nu)\, \Pi'(a_\nu)}$$

и

$$\mathbf{R}_n(f, x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(z)}{z - x} \frac{\Pi(x)}{\Pi(z)} dz,$$

где положено

$$\Pi(x) = \prod_{\nu=0}^{n} (x - a_\nu).$$

Заметим в заключение, что формулы (7) и (5) могут быть записаны и следующим образом:

$$\mathbf{P}_n(f, x) = \frac{1}{\mathbf{U}_n} \int \ldots \int P_n(f, x; x_0, \ldots, x_n) W(x_0, \ldots, x_n)\, d\psi_0(x_0) \ldots d\psi_n(x_n), \tag{10}$$

$$\mathbf{R}_n(f, x) = \frac{1}{\mathbf{U}_n} \int \ldots \int R_n(f, x; x_0, \ldots, x_n) W(x_0, \ldots, x_n)\, d\psi_0(x_0) \ldots d\psi_n(x_n), \tag{11}$$

причем $P_n(f, x; x_0, \ldots, x_n)$ обозначает интерполяционный многочлен Лагранжа степени n, построенный для точек интерполяции $x_0, x_1, \ldots \ldots, x_n$; $R_n(f, x; x_0, \ldots, x_n)$ — соответствующий остаточный член.

Поступило
20 I 1948