Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 9

МАТЕМАТИКА

И. Я. АКУШСКИЙ

НЕКОТОРЫЕ ОПЕРАЦИОННЫЕ ЦИКЛЫ ТАБУЛЯТОРА, СВЯЗАННЫЕ С ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ ЧИСЕЛ В ДВОИЧНОЙ СИСТЕМЕ

(Представлено академиком Н. Г. Бруевичем 23 XII 1947)

В работе (1) были определены операционные циклы табулятора вертикально-горизонтального действия и рассмотрены некоторые важные для приложений циклы. Здесь мы продолжим рассмотрение циклов, причем основную роль будут играть циклы, приводящие к выполнению на табуляторе своеобразного умножения, опирающегося на представление одного из сомножителей по двоичной системе.

Для упрощения последующих рассмотрений мы введем обозначение $(\sigma_1)_t$ $(t=1, 2, \dots)$, означающее последовательное выполнение t раз операции $\sigma_1\to\sigma_1$.

Рассмотрим следующий цикл (двухсвязный — участвуют счетчики σ_1 и σ_2): $r_{1,m}-(\sigma_1)_{t_{1,m}}$; $r_{2,m}-\sigma_2\to\sigma_1$; $r_{3,m}-(\sigma_1)_{t_{2,m}}$; $r_{4,m}-\sigma_2\to\sigma_1$; ...; $r_{2\xi-1,m}-(\sigma_1)_{t_{\xi,m}}$; $r_{2\xi,m}-\sigma_2\to\sigma_1$.

В результате получаем:

$$a_1^m=\left\{\left\{\dots\left\{\left[\left(2^{t_{1,m}}a_1^0+a_2^0\right)2^{t_{2,m}}+a_2^0\right]2^{t_{3,m}}+a_2^0\right\}\dots\right\}2^{t_{\xi,m}}+a_0^2=$$
$$=2^{t_{1,m}+t_{2,m}+\dots+t_{\xi,m}}a_1^0+$$
$$+a_2^0\left(2^{t_{2,m}+t_{3,m}+\dots+t_{\xi,m}}+2^{t_{3,m}+\dots+t_{\xi,m}}+\dots+2^{t_{\xi,m}}+1\right).$$

Полагая $a_1^0=a_2^0=N$, мы видим, что в результате осуществления описанного цикла мы получаем произведение заданного числа N на нечетное число

$$M=2^{t_{1,m}+t_{2,m}+\dots+t_{\xi,m}}+2^{t_{2,m}+\dots+t_{\xi,m}}+\dots+2^{t_{\xi,m}}+1.$$

Пусть число M может быть представлено по двоичной системе в виде

$$M=2^{k_1}+2^{k_2}+\dots+2^{k_\xi}+1\qquad(k_1>k_2>\dots>k_\xi).$$

Тогда, решая систему уравнений

$$t_{l,m}+t_{l+1,m}+\dots+t_{\xi,m}=k_l\ \ (l=1, 2, \dots, \xi),$$

мы определяем нужные нам числа $t_{1,m}, \dots, t_{\xi,m}$, характеризующие параметры шагов цикла, а именно:

$$t_{\xi,m}=k_\xi,\quad t_{\xi-1,m}=k_{\xi-1}-k_\xi,\quad t_{\xi-2,m}=k_{\xi-2}-k_{\xi-1},\ \dots,\ t_{1,m}=k_1-k_2.$$

В случае M четного из описанного цикла исключается последний шаг $r_{2\xi,m}$.

Таким образом, для умножения на число M надо разложить M по двоичной системе и задать параметры $t_{1,m}$, $t_{2,m}$ . . . , $t_{\xi,m}$. Задание параметров может быть осуществлено различными путями. Нами при реализации подобных циклов применялось задание параметров специальной серией карт $\pi_{1,m}$, $\pi_{2,m}$, . . . , $\pi_{\xi,m}$, где карта $\pi_{j,m}$ $(j=1, \ldots, \xi)$ содержала номер j и число $t_{j,m}$. При прохождении карты $\pi_{j,m}$ на специальном контрольном счетчике σ_K откладывается $t_{j,m}$ (в комплементном виде), после чего возникает серия ходов $\sigma_1 \to \sigma_1$, и с каждым таким ходом в σ_K прибавляется 1. Когда в σ_K во всех разрядах устанавливается 9 (т. е. через $t_{j,m}$ ходов), прекращаются передачи $\sigma_1 \to \sigma_1$ и возникает ход $\sigma_2 \to \sigma_1$, после чего под блок Б$_2$ подходит карта $\pi_{j+1,m}$, на σ_K фиксируется $t_{j+1,m}$, и все происходит аналогично рассмотренному.

Так как нельзя считать, что всегда возможно в табуляторе использовать какой-либо из счетчиков в качестве контрольного без значительного переустройства табулятора, мы рассмотрим еще и другие способы реализации множительного цикла, не связанные с введением контрольного счетчика.

Пусть нам надо помножить число N на $M=2^t\varepsilon_t+2^{t-1}\varepsilon_{t-1}+\ldots$ $\ldots+2^q\varepsilon_q+\ldots+2\varepsilon_1+\varepsilon_0$. Образуем серию из $t+1$ вспомогательных карт π_t, $\pi_{t-1}, \ldots \pi_q, \ldots, \pi_1, \pi_0$ — массив μ. Карта π_q содержит в группе колонок g номер q $(q=0, 1, \ldots, t)$ и в колонке λ — значение ε_q, отображающееся надсечкой при $\varepsilon_q=1$ и отсутствием надсечки при $\varepsilon_q=0$. Вводим счетчики σ_1 и σ_2 и устанавливаем в счетчике σ_2 число N. Передачу $\sigma_2 \to \sigma_1$ мы коммутируем не непосредственно, а через селектор S, соединяя гнезда головок счетчика σ_2 с контактами ряда С селектора S и выводя соответствующие контакты ряда (X) к магнитам счетчика σ_1. Тогда передача $\sigma_2 \to \sigma_1$ может быть осуществлена в том и только в том случае, когда селектор S будет находиться в положении С — X.

Вводим управление селектором S по колонке λ и пропускаем на табуляторе массив μ, расположенный в порядке убывания номера q, с тем, чтобы при прохождении карты π_q совершалась передача (через селектор S) $\sigma_2 \to \sigma_1$, а после прохождения каждой карты π_q (за исключением последней π_0) возникал ход $(\sigma_1)_1$.

Прежде всего установим следующее. Ход, реализующий передачу $\sigma_2 \to \sigma_1$ через селектор S приводит к установке в счетчике σ_1 числа $N\varepsilon$, где $\varepsilon=1$ или 0 в зависимости от того, был ли селектор S на этом ходу в положении С — X или С — NX. Учитывая содержание карт массива μ, мы можем сказать, что при прохождении карты π_q на счетчик σ_1 поступает число $N\varepsilon_q$. Таким образом, сопоставляя это обстоятельство с результатом ходов $(\sigma_1)_1$, мы получаем после исчерпания всех карт массива μ в счетчике σ_1 число

$$\{\ldots\{\{[(N\varepsilon_t 2+N\varepsilon_{t-1})2+N\varepsilon_{t-2}]2+N\varepsilon_{t-3}\}\,2+\ldots+N\varepsilon_0=$$
$$=N(2^t\varepsilon_t+2^{t-1}\varepsilon_{t-1}+\ldots+2\varepsilon_1+\varepsilon_0)=NM.$$

Здесь, в отличие от предыдущего способа, серия вспомогательных карт регулирует передачу (или отсутствие таковой) $\sigma_2 \to \sigma_1$, в то время как ход $(\sigma_1)_1$ происходит обязательно после продвижения через блок Б$_2$ каждой карты массива μ. Естественно, что в этом случае в контрольном счетчике нет необходимости.

Характер описанного множительного процесса позволяет одновременно вести умножения на различные множители посредством следующего цикла: $r_{1,m}$ — $\sigma_2 \to \sigma_1$ (через селектор S$_1$), $\sigma_4 \to \sigma_3$ (через селектор S$_2$), . . . , $\sigma_{2\rho} \to \sigma_{2\rho-1}$ (через селектор S$_\rho$), . . . , $\sigma_{2k} \to \sigma_{2k-1}$ (через селектор S_k) $(m=t,\ t-1,\ldots,1,0)$; $r_{2,m}-(\sigma_1)_1,\ (\sigma_3)_1,\ldots,(\sigma_{2\rho-1})_1,\ldots$ $\ldots,(\sigma_{2k-1})_1$ $(m=t,t-1,\ldots,2,1)$.

Селекторы $S_1, S_2,\ldots,S_\rho,\ldots,S_k$ управляются соответственно по колонкам $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\rho,\ldots,\lambda_k$.

Пусть на счетчике $\sigma_{2\rho}$ $(\rho=1,2,\ldots,k)$ установлено число N_ρ и пусть $M_\rho=2^t\varepsilon_{t,\rho}+2^{t-1}\varepsilon_{t-1,\rho}+\ldots+2\varepsilon_{1,\rho}+\varepsilon_{0,\rho}$. Пусть, далее, на карте π_q массива μ в колонке λ_ρ отображено значение $\varepsilon_{q,\rho}$. Тогда в результате прохождения карт массива μ указанный цикл приводит к установке в счетчике $\sigma_{2\rho-1}$ числа $N_\rho M_\rho$. Таким образом, здесь возможно одновременно проводить k умножений, если количество счетчиков табулятора не менее $2k$.

Наконец, мы приведем способ, который позволяет проводить каждое умножение в одном счетчике вместо двух. Счетчик σ_2 заменяется в этом случае сектором g_1 карт массива μ: наносим на все карты массива μ в сектор g_1 величину N. Проводим цикл (с управлением селектором S по колонке λ): $r_{1,m}-g_1\to C$, $(X)\to\sigma_1$ $(m=t,t-1,\ldots,1,0)$; $r_{2,m}-(\sigma_1)_1$ $(m=t,t-1,\ldots,2,1)$.

Легко видеть, что в результате прохождения карт массива μ этот цикл приводит к установке на счетчике σ_1 числа NM. Совершенно очевидно, что одновременные вычисления при этом способе можно вести в удвоенном масштабе.

Мы теперь перейдем к рассмотрению циклов для решения некоторых математических задач, причем в эти циклы составной частью войдут описанные нами множительные циклы. Для удобства последующего изложения целесообразно выделить множительный цикл как самостоятельный элемент более сложного цикла. Мы будем обозначать множительный цикл, проводящийся в счетчиках σ_ρ, σ_χ (результат образуется в σ_ρ) с параметрами $t_1,\ t_2,\ldots,t_m$, через $P_{\rho\chi}(t_1^{\rho\chi},\ t_2^{\rho\chi},\ldots$ $\ldots,t_m^{\rho\chi})$. В случае применения второго рассмотренного способа мы параметрами множительного цикла будем считать цифры $\varepsilon_t,\varepsilon_{t-1},\ldots,\varepsilon_0$ двоичного разложения множителя.

Пусть нам задано линейное разностное уравнение n-го порядка

$$f(x+n)=u_1(x)f(x+n-1)+u_2(x)f(x+n-2)+\ldots+u_n(x)f(x)\quad(1)$$

с начальными условиями $f(x_0)=a_0, f(x_0+1)=a_1,\ldots,f(x_0+n-1)=$ $=a_{n-1}$. Построим следующий $(n+1)$-связный цикл z_m (участвуют счетчики $\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_n$): $r_{1,m}-\sigma_n\rightleftarrows\sigma_n$; $r_{2,m}-\sigma_{n-1}\to\sigma_n;\ldots;$ $r_{2n-1,m}-$ $-\sigma_1\rightleftarrows\sigma_1$; $r_{2n,m}-\sigma_0\to\sigma_1$ *; $r_{2n+1,m}-P_{01}(t^{01}_{1,m},\ t^{01}_{2,m},\ldots,\ t^{01}_{\xi,m});\ldots;$ $r_{3n,m}-P_{0n}(t^{0n}_{1,m},t^{0n}_{2,m},\ldots t^{0n}_{\xi,m})$.

Конструируем параметры множительных процессов цикла z_m следующим образом: 1) $t^{0n}_{j,m}$ $(j=1,2,\ldots,\xi)$ из двоичного разложения $u_n(x_m)=u_n(x_0+m+n-1)$; 2) $t^{0n-1}_{j,m}$ из двоичного разложения $u_{n-1}(x_m):2^{t_n}$ (t_n — двоичная разрядность $u_n(x_m)$) и т. д. n) $t^{01}_{j,m}$ из двоичного разложения $u_1(x_m)$: $2^{t_n+t_{n-1}+\ldots+t_2}$ (t_2 — двоичная разрядность $u_2(x_m)$). В результате подобного конструирования параметров цикла мы получим по окончании цикла z_m в счетчике σ_0 число

$$u_1(x_m)a_0^{m-1}+u_2(x_m)a_1^{m-1}+\ldots+u_n(x_m)a_{n-1}^{m-1}.$$

---

* В случае применения способа без контрольного счетчика необходимо ввести еще ход $r'_{2n,m}-\sigma_0\rightleftarrows\sigma_0$.

Пусть теперь положение на счетчиках к началу цикла z_m было:

$$a_n^{m-1}=f(x_0+m-1),\quad a_{n-1}^{m-1}=f(x_0+m-1+1),\ldots$$
$$\ldots, a_0^{m-1}=f(x_0+m-1+n).$$

Тогда после первых $2n$ шагов цикла z_m мы получаем в счетчиках $\sigma_n,\ldots,\sigma_1$ соответственно показания:

$$a_n^m=a_{n-1}^{m-1}=f(x_0+m),\quad a_{n-1}^m=a_{n-2}^{m-1}=f(x_0+m+1),\ldots$$
$$\ldots, a_1^m=f(x_0+m+n-1).$$

В результате же остальных шагов цикла мы получаем в счетчике σ_0 установленным число

$$a_0^m=u_1(x_0+m)f(x_0+m+n-1)+\ldots$$
$$\ldots+u_n(x_0+m)f(x_0+m)=f(x_0+m+n).$$

Итак, в результате цикла z_m мы получим в показаниях счетчиков индекс, увеличенным на единицу, и в σ_0 значение функции, удовлетворяющее уравнению (1).

Введя по окончании цикла печатающий ход с проявлением показаний счетчика σ_0, а также номера цикла, мы получим таблицу значений искомой функции, удовлетворяющей уравнению (1).

Описанный цикл z_m требует предварительной усложненной подготовки двоичных разложений значений коэффициентов, поскольку в определении параметров умножения на $u_i(x)$ учитываются значения всех предыдущих коэффициентов. Поэтому целесообразно (в особенности, если коэффициенты уравнения (1) не постоянны) избавиться от этой усложненной подготовки, что возможно за счет некоторых добавлений к z_m.

Нами реализованы циклы для некоторых важных простейших уравнений. Так, уравнение $f(x+1)=(x+1)f(x)$ при $f(0)=1$ приводит к функции $(x+1)!$, и мы получаем на табулаграмме таблицу факториалов. Для этого мы разлагаем в двоичную систему последовательные целые числа от 1 до H и, проводя множительный элемент цикла по параметрам этого двоичного разложения, получаем факториалы всех целых чисел от 1 до H.

Если мы аналогичный цикл проведем с параметрами, определяющимися двоичными разложениями постоянного числа y, т. е. будем решать уравнение $f(x+1)=yf(x)$, то при $f(0)=1$ мы будем получать последовательно значения $y, y^2,\ldots,y^m$, а при $f(0)=c$ соответственно $cy, cy^2,\ldots,cy^m$. Далее, если мы тот же цикл будем проводить по параметрам двоичного разложения величин $y/1,\ y/2,\ldots,y/n$, то при $f(0)=c$ мы будем получать величины $c,\ cy/1!,\ cy^2/2!,\ldots,cy^n/n!$

Удлиним теперь этот цикл тем, что введем в начале каждого цикла передачу от карты в счетчики σ_0 и σ_1 числа $d_1, d_2,\ldots,d_n$. Тогда после цикла z_n мы получим в счетчике σ_1 сумму

$$\frac{d_1y^n}{n!}+\frac{1!\,d_2y^{n-1}}{n!}+\frac{2!\,d_3y^{n-2}}{n!}+\ldots+\frac{s!\,d_{s+1}y^{n-s}}{n!}+\ldots+\frac{(n-1)!\,d_ny}{n!}.$$

Добавляя по окончании цикла z_n в σ_1 число $d_0=\varphi(0)$ и определяя числа d_s по формуле $d_s=\dfrac{n!}{(s-1)!\,(n-s+1)!}\varphi^{(n-s+1)}(0)$, мы получаем значение $\varphi(y)$ как сумму n членов ряда Маклорена для функции $\varphi(x)$.

Поступило
23 XII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Я. Акушский, ДАН, **59**, № 8 (1948).