Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

ПРЕДЕЛЫ

ПРАКТИКУМ
по дисциплине «Математика»
для студентов технических специальностей
заочной формы обучения

Гомель 2024

УДК 517.2(075.8)
ББК 22.161.1я73
П71

Рекомендовано научно-методическим советом факультета автоматизированных и информационных систем ГГТУ им. П. О. Сухого (*протокол № 7 от 01.03.2023 г.*)

Составитель *В. И. Лашкевич*

Рецензент: доц. каф. «Физика» ГГТУ им. П. О. Сухого канд. техн. наук, доц. *И. И. Злотников*

П71 **Пределы** : практикум по дисциплине «Математика» для студентов техн. специальностей заоч. формы обучения / сост. В. И. Лашкевич. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2024. – 17 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: https://elib.gstu.by. – Загл. с титул. экрана.

Представлен основной теоретический материал. Подробно изложено решение основных типов задач. Даны задания для подготовки к тестированию по данной теме.

Для студентов технических специальностей заочной формы обучения.

УДК 517.2(075.8)
ББК 22.161.1я73

ПРЕДЕЛЫ

1.1 Предел последовательности

Определение: Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число x_n. Совокупность чисел $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ называется числовой последовательностью.

Например

$$\left\{\frac{1}{n^2}\right\} = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots \frac{1}{n^2}, \ldots.$$

Определение предела последовательности. Число называется пределом последовательности , если для любого сколь угодно малого положительного числа ϵ найдется такой номер $N(\epsilon)$, что для всех $n > N(\epsilon)$ выполняется неравенство:

$$|x_n - a| < \epsilon . \tag{1.1}$$

Символически записывают так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

В этом случае говорят, что последовательность сходится.

Если раскрыть модуль в неравенстве (1.1), то получим, что члены последовательности, начиная с некоторого номера, попадут в окрестность точки a: $(a - \epsilon, a + \epsilon)$.

Свойства содящихся последовательностей

1. Если последовательность сходится к числу a и a > p (a < q), то все значения переменной, начиная с некоторого номера тоже будут > p (< q).
2. Если последовательность имеет предел a>0 (<0), то начиная с некоторого номера, все члены последовательности x_n>0 (<0).
3. Если последовательность сходится, то она ограничена.
4. Предел сходящейся последовательности единственный.

Пример. Пользуясь определением предела последовательности, показать, что $\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n+1} = \frac{1}{2}$

Решение. Модуль разности

$$\left|\frac{n+3}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{5}{2n+1}<\epsilon$$

при $n>\frac{5}{2\epsilon}-\frac{1}{2}$

Таким образом, для произвольного $\epsilon>0$ существует такое N(ϵ),что при n>N(ϵ) выполняется неравенство (1.1). Следовательно число $\frac{1}{2}$ является пределом нашей последовательности.

Действия с пределами. Если две последовательности $\{x_n\}$и $\{y_n\}$ имеют пределы соответственно a и b ,то

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=a+b\,, \qquad \lim_{n\to\infty}(x_n*y_n)=a*b\,, \lim_{n\to\infty}(x_n/y_n)=a/b$$

В последней формуле b≠0.

Определение бесконечно малой последовательности

Последовательность называется бесконечно малой, если $\lim_{n\to\infty}x_n=0$

Определение бесконечно большой последовательности

Последовательность называется бесконечно большой, если для любого сколь угодно большого A>0, начиная с некоторого номера N выполняется неравенство $|x_n|>A$.

Если последовательность является бесконечно большой и все ее члены, начиная с некоторого номера >0 (<0), то символически пишут

$$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty, \ (\lim_{n\to\infty}x_n=-\infty\ )$$

Свойства бесконечно малы

Сумма конечного числа бесконечно малых есть бесконечно малая.

Призведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность есть бесконечно малая последовательность.

Если последовательность x_n является бесконечно большой,то последовательность $\alpha_n=\frac{1}{x_n}$ является бесконечно малой.

Например: последовательность x_n =n - бесконечно большая, а $\alpha_n = \frac{1}{n}$ - бесконечно малая.

Пределы некоторых последовательностей

При вычислении пределов полезными являются следующие формулы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^c} = 0 \ , c > 0 \ , \qquad \lim_{n\to\infty} n^c = +\infty \, , c > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \ , |q| < 1 \, , \quad \lim_{n\to\infty} q^n = +\infty, q > 1$$

Используя эти формулы, вычислим пределы вида

$$x_n = \frac{a_0 n^m + a_1 n^{m-1} + \cdots a_m}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \cdots b_k}$$

Этот предел представляет собой неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. При этом возможны 3 случая:

1. m = k. Предел в этом случае равен $\frac{a_0}{b0}$

$$x_n = \frac{(2n+1)(n+3)}{n^2},$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{1} = 2$$

2. m < k. Предел в этот случае равен 0.

$$x_n = \frac{(2n+1)(n+3) * (3n+2)}{n^4 + n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

3. m > k. Предел в этом случае равен ∞.

При вычислении пределов могут вочникнут неопределенности вида $(\infty - \infty)$.

Пример

$$x_n = \sqrt{n} * (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}).$$

В этом случае нужно умножить и поделить x_n на $(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})$.

В результате получим

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)*(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})} = \frac{1}{2}.$$

Пример: $x_n = \frac{1^2+2^2+\cdots.+n^2}{n^3}$.

Для вычисления этого предела воспользуемся формулой

$$1^2+2^2+\cdots.+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Откуда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots.+n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6*n^2} = \frac{1}{3}.$$

1.2. Монотонные последовательности. Число е

Определение. Последовательность называется монотонно неубывающей (невозрастающей), если

$$x_{n+1} \geq x_n, (x_{n+1} \leq x_n).$$

Теорема о существовании предела монотонной последовательности. Если монотонно неубывающая(невозрастающая) последовательность ограсничена сверху(снизу),то она сходится.

Пример. $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$. Эта последовательность ограничена сверху и монотонно возрастает, следовательно она сходится

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Пример. Последовательность задана рекурентной формулой

$$x_{n+1} = \sqrt{c+x_n}$$

Очевидно,что последовательность возрастает и ограничена сверху, например ,числом $\sqrt{c}+1$. Следовательно последовательность сходится и имеет конечный предел a. Переходя в равенстве к пределу получим

$$a^2 = c + a.$$

Откуда, решая квадратное уравнение, получим

$$a = \frac{1+\sqrt{4c+1}}{2}.$$

1.3 Теорема Штольца

Если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$=$+\infty$, причем начиная с некоторого номера последовательность y_n монотонно возрастает. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}.$$

Пример. Вычислить предел последовательности $z_n = \frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$

Полагая $x_n = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$, $y_n = n^{k+1}$.

Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}}.$$

Расклдывая выражение $(n-1)^{k+1}$ по биному Ньютона и ограничиваясь первыми двумя слагаемыми, получим

$$(n-1)^{k+1} = n^{k+1} - (k+1) * n^k + \dots .$$

Подставляя это выражение в предыдущую формулу, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^k*(k+1)+\cdots} = \frac{1}{k+1}.$$

Пример. Пусть последовательность a_n имеет предел, тогда и последовательность b_n=$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ имеет тот же предел.

2.1. Предел функции.

Определение предела функции по Гейне. Чило b называется пределом функции $f(x)$ в точке a , если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a , элементы которой не равны a, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу b.

Определение предела функции по Коши. Чило b называется пределом функции $f(x)$ в точке a, если для любого сколь угодно малого положительного числа найдется такое δ>0 , что для всех x , удовлетворяющих неравенству $0 < |x-a| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - b| < \epsilon.$$

Символически записывают так

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

Правила вычисления пределов такие же как и для последовательностей. Так как

$$\lim_{x\to a} x = a$$

То $$\lim_{x\to a} x^n = a^n,\quad \lim_{x\to a} P_n(x) = P_n(a)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(a)}{Q_n(a)}, \qquad \text{если } Q_n(a) \neq 0$$

Если $Q_n(a) = 0$ и $P_m(a) = 0$, то последний предел представляет собой неопределенность 0/0. В этом случае нужно разложить числитель и знаменатель на множители и сократить множитель, который обращает числитель и знаменатетель в ноль.

Пример. Вычислить предел функции

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x+1)}{(x-2)} = -3.$$

Ответ: –3.

Пример. Вычислить предел функции

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^5+1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)}{(x+1)}=5.$$

Ответ: 5.

2.2. Бесконечно малые функции

Определение. Функция α(x) называется бесконечно малой в точке a, если предел функции в этой точке равен 0.

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0.$$

Если функция f(x) имеет в точке a предел равный b, то имеет место представление

$$f(x)=b+\alpha(x).$$

Например функция $f(x)=x$ является бесконечно малой в точке $x=0$. Функция $g(x)=x^2$ также является бесконечно малой в точке $x=0$. Очевидно , что вторая функция стремится к нулю быстрее, чем первая.

Пусть две функции α(x) и β(x) являются бесконечно малыми в точке a.

Если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0.$$

То говорят, что функция α(x) имеет в точке a более высокий порядок малости.

Если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=b.$$

и b$\neq 1$, говорятся , что функции имеют в точке a одинаковый порядок малости.

Если b = 1, то говорят, что функции являются эквивалентными бесконечно малыми в точке a. Символически пишут α(x) ~ β(x) .

Пример. α(x)= x^2+x , $\beta(x)=x$. В этом случае

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1.$$

Следовательно эти функции являются эквивалентными бесконечно малыми в точке $x = 0$.

Пример. $\alpha(x) = \sqrt{1+x} - 1$, $\beta(x) = x$. В этом случае

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно эти функции имеют одинаковый порядок малости в точке $x = 0$.

2.3. Первый и второй замечательные пределы

Первый замечательный предел имеет вид

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1$$

Следовательно в точке $x = 0$, $sinx \sim x$.

Пусть функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой в точке a.

В этом случае в точке a: $sin\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$.

При вычислении пределов в точке $x = 0$ справедливы формулы

$$tgx \sim x, \qquad arcsinx \sim x, \qquad arctgx \sim x$$

Пример. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg^2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Мы в этом примере заменили $tgx \sim x$.

Пример. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{sin(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{x-1} = 1.$$

Мы в этом примере заменили $\sin(x-1) \sim x-1$.

Второй замечательный предел имеет две формы записи

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Пусть функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой в точке a.

Тогда второй замечательный предел можно записать в виде

$$\lim_{x\to a}\left(1+\alpha(x)\right)^{1/\alpha(x)}=e.$$

Используя второй замечательный предел можно вычислить следующие пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a$$

Откуда следует, что в нуле

$$e^x-1\sim x,\quad \ln(1-x)\sim x,\qquad (1-x)^a\sim 1+ax$$

Пример. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-e^x+1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

2.4. Вычисление пределов от показательно-степенной функции

$$\lim_{x\to 0}(u(x))^{v(x)},$$

$$\lim_{x\to a}(u(x))^{v(x)}=A^B,\quad A=\lim_{x\to a}u(x)\ ,\quad B=\lim_{x\to a}v(x).$$

Пример. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\pi}x^{cosx}=\pi^{-1}.$$

В случае когда A=1 а B=∞ предел представляет неопределенность 1^∞. В этом случае для вычисления предела используется формула

$$\lim_{x\to a}u(x)^{v(x)}=e^{\lim v(x)*(u(x)-1)}.$$

Пример.

$$\lim_{x\to 0}cosx^{1/x^2}=Exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{cosx-1}{x^2}\right]=e^{-1/2}.$$

2.5. Вычисление пределов с помошью правила Лопиталя

Правило Лопиталя позволяет раскрыть неопределенности $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

Теорема. Пусть функции f(x) и g(x) – дифференцируемые функции и g'(x)$\neq 0$. Тогда если функции f(x и g(x) являются бесконечно малыми или бесконечно большими в точке а, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

при условии, что предел правой части существует. Отметим, что правило Лопиталя применимо не всегда. Предел левойчасти может су ществовать, а предел правой не существовать.

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 * sin[\frac{1}{x}]}{x} = 0.$$

В то время как, предел отношения производных не существует.

Пример.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{x\to 1}\frac{m * x^{m-1}}{n * x^{n-1}} = \frac{m}{n}.$$

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{-1+\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2 * \sqrt{x+1}}}{1} = \frac{1}{2}.$$

Правило Лопиталя позволяет раскрывать и другие неопределенности:

$$(0 * \infty), \quad (\infty - \infty), \quad (0^0, 1^\infty, \infty^0).$$

Неопределенность $(0 * \infty)$, раскрывается следующим образом:

Одна из функций осталяют в числителе , а вторую заносят в знаменатель. В результате получается неопределенность $\frac{0}{0}$ либо $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример.

$$\lim_{x\to 0+0} x*lnx = \lim_{x\to 0+0}\frac{lnx}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+0} -x = 0.$$

В этом примере мы свели неопределенность $(0*\infty)$ к неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Для раскрытия неопредеденностей $(0^0, 1^\infty, \infty^0)$ воспользуемся тождеством

$$u^v = Exp[(v*lnu).$$

В результате

$$\lim_{x\to a} u^v = Exp(\lim_{x\to a} v*lnu).$$

Пример.

$$\lim_{x\to\pi/2} sinx^{1/cosx} = Exp\left[\lim_{x\to\pi/2}\frac{ln(sinx)}{cosx}\right] = Exp\left[\lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{cosx}{sinx}}{-sinx}\right] = 1.$$

3. Задания к тесту по пределам

Вычислить пределы

Вариант 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3*n+2}{3*n^2+2*n+1}, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-3*n+2}-\sqrt{n^2+2*n+1}}{5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}, \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{2*n+3}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3*x+2}{x-1}, \quad \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2*x}-\sqrt{x+1}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin(2x)},\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{e^{x-1}-1},\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{\frac{2}{x}}$$

Вариант 2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3*n+1}{3*n^3+2*n+1},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2*n+2}-\sqrt{n^2+2*n+1}}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{2n^2},\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{3*n+1}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-3*x-2}{x^2-x-2},\quad \lim_{x\to 1}\frac{\sin 2(x-1)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{3^x-1},\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{e^{x-1}-1},\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{2}{x}}$$

Вариант 3

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2*n+1}{3*n^3+2*n+3m},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3*n+2}-\sqrt{n^2-2*n+1}}{\sqrt{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{2+4+\dots+2n},\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n+7}\right)^{4*n+1}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-3*x-2}{x^2+2x+1},\quad \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-3x+2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin 7x},\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{\ln x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{\sin x}\right)^{1/x^2}$$

Вариант 4

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+3*n+1}{4*n^3+5*n+3m}, \quad \lim_{n\to\infty} n\sqrt{n}-\sqrt{n(n+2)(n+3)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+2^n}{2*5^n-2^n}, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3}{n^2-1}\right)^{2*n^2+1}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^4-1}{2x^4-2x^2-11}, \qquad \lim_{x\to1}\frac{sin\pi x}{x^2-3x+2}$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-sin(x/2)}{\pi-x}, \quad \lim_{x\to1}\frac{x^5-1}{lnx}, \quad \lim_{x\to\pi/3}\frac{1-2cosx}{\pi-3x}$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{arcsinx}{x}\right)^{2/x^2}$$

Вариант 5

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{n^2+n}, \quad \lim_{n\to\infty} n*(\sqrt{n^2+1}-n)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+2^n}{4*3^n-2^n}, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)^{3*n^3+1}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}, \qquad \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}{x-1}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{sin^2x-x^2}{x^2}, \quad \lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{lnx}, \quad \lim_{x\to2}\frac{ln(9-2x^2)}{sin(\pi x)}$$

$$\lim_{x\to0}(1+sinx)^{2/x^2}$$

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДЕЛЫ

ПРАКТИКУМ
по дисциплине «Математика»
для студентов технических специальностей
заочной формы обучения

Составитель **Лашкевич** Василий Иванович

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 02.05.24.
Рег. № 112E.
http://www.gstu.by