Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 7

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

М. И. РОЗОВСКИЙ

ОБ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЯХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 6 I 1948)

1. Рассмотрим процесс передачи энергии по длинным проводам при наличии магнитного и диэлектрического последействия.

Согласно теории магнитного и диэлектрического последействия Вольтерра [1], обычные формулы $\overline{B}=\mu\overline{H}$ и $\overline{D}=\varepsilon\overline{E}$ необходимо заменить следующими

$$\overline{B}=\mu\overline{H}+\int_{-\infty}^{t}\mu_1(t-\tau)\overline{H}(\tau)\,d\tau,\quad D=\varepsilon\overline{E}+\int_{-\infty}^{t}\varepsilon_1(t-\tau)\overline{E}(\tau)\,d\tau, \tag{1}$$

где $\overline{B}$ — магнитная индукция, $\overline{D}$ — электрическое смещение $\overline{H}$ и $\overline{E}$ — магнитное и электрическое поля, $\mu_1(t-\tau)$ и $\varepsilon_1(t-\tau)$ — коэффициенты магнитного и диэлектрического последействия соответственно.

Путем обычных рассуждений, но с учетом формул (1), можно получить систему интегро-дифференциальных уравнений, описывающих наш процесс:

$$\begin{gathered}\frac{\partial V}{\partial x}=RJ+L\frac{\partial J}{\partial t}+\int_{-\infty}^{t}\varphi(t-\tau)\frac{\partial J(\tau)}{\partial\tau}\,d\tau,\\ \frac{\partial J}{\partial x}=GV+C\frac{\partial V}{\partial t}+\int_{-\infty}^{t}\psi(t-\tau)\frac{\partial V(\tau)}{\partial\tau}\,d\tau,\end{gathered}\tag{2}$$

где J — сила, V — напряжение (отсчет координаты идет от конца линии). Функции $\varphi(t-\tau)$ и $\psi(t-\tau)$ будем также называть коэффициентами магнитного и диэлектрического последействия соответственно, поскольку они отличаются от $\mu_1(t-\tau)$ и $\varepsilon_1(t-\tau)$ лишь постоянными множителями, не зависящими от природы материала линии.

Пусть к зажимам линии приложена периодическая э. д. с.

Тогда, принимая $\overline{V}=V_1e^{i\omega t}$, $\overline{J}=J_1e^{i(\omega t+\alpha)}$, получим $\overline{V}=\overline{C}_1e^{\overline{\gamma}x}+\overline{C}_2e^{-\overline{\gamma}x}$,

$\overline{J}=\overline{C}_3e^{\overline{\gamma}x}+\overline{C}_4e^{-\overline{\gamma}x}$, где $\overline{\gamma}=\sqrt{\overline{k}_1\overline{k}_2}$, $\overline{k}_1=R+i\omega\left[L+\int_0^{\infty}\varphi(z)\,e^{i\omega z}dz\right]$,

$\overline{k}_2=G+i\omega\left[C+\int_0^{\infty}\psi(z)\,e^{i\omega z}dz\right]$.

Представляя $\overline{k}_1$ и $\overline{k}_2$ в виде $\overline{k}_1=k_1e^{i\psi_1}$, $\overline{k}_2=k_2e^{i\psi_2}$, получим

$$k_1=\sqrt{R_*^2+\omega^2L_*^2},\quad \psi_1=\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega L_*}{R_*},$$

$$k_2=\sqrt{G_*^2+\omega^2 C_*^2}, \quad \psi_2=\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega C_*}{G_*},$$

$$R_*=R-\omega\int_0^\infty \varphi(z)\sin\omega z\,dz, \quad G_*=G-\omega\int_0^\infty \psi(z)\sin\omega z\,dz, \tag{3}$$

$$L_*=L+\int_0^\infty \varphi(z)\cos\omega z\,dz, \quad C_*=C+\int_0^\infty \psi(z)\cos\omega z\,dz.$$

Таким образом, для нахождения V и J при наличии магнитного и диэлектрического последействия достаточно в соответствующих формулах установившихся процессов, определяющих V и J в классическом случае (т. е. при отсутствии последействия), заменить L, C, R и G соответственно величинами L_*, C_*, R_* и G_*, определяемыми формулами (3).

Для различных частот ω будем иметь:
если $\omega\to 0$, то $R_*\to R$, $G_*\to G$, $L_*\to L+A_1$, $C_*\to C+A_2$;
если $\omega\to\infty$, то $R_*\to R-B_1$, $G_*\to G-B_2$, $L_*\to L$, $C_*\to C$,
где A_1, B_1, A_2, B_2 — постоянные, зависящие от параметров коэффициентов магнитного и диэлектрического последействия.

Например, принимая коэффициенты последействия В. К. Аркадьева [2], получим:

$$A_1=q\chi_\infty, \quad B_1=aq\chi_\infty, \quad A_2=k_\infty/q, \quad B_2=bk_\infty/q,$$

где χ_∞, k_∞ — константы установившейся намагниченности и поляризации соответственно, a и b — скорости релаксации, $q=4\ln\frac{d}{r}$, d — расстояние между центрами проводов, r — радиус провода.

2. Рассмотрим теперь устанавливающиеся процессы при наличии магнитного и диэлектрического последействия.

Пусть начало линии длины l находится под постоянным напряжением E, а конец заземлен.

В этом случае граничные и начальные условия будут:

$$V(0,t)=E, \quad V(l,t)=0, \quad V(x,0)=0, \quad J(x,0)=0. \tag{4}$$

Положим $V=V_1+V_2$, $J=J_1+J_2$, где V_1, J_1 — установившиеся значения электромагнитных процессов, V_2, J_2 — переходные процессы.

Тогда V_1 и J_1 будут удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$-dV_1/dx=R^*J_1, \quad -dJ_1/dx=G^*V_1, \tag{5}$$

$$R^*=R+\varphi(0)+\int_0^\infty \varphi'(z)\,dz, \quad G^*=G+\psi(0)+\int_0^\infty \psi'(z)\,dz,$$

V_2 и J_2 — системе интегро-дифференциальных уравнений

$$-\frac{\partial V_2}{\partial x}=RJ_2+L\frac{\partial J_2}{\partial t}+\int_0^t \varphi(t-\tau)\frac{\partial J_2}{\partial\tau}\,d\tau,$$
$$-\frac{\partial J_2}{\partial x}=GV_2+C\frac{\partial V_2}{\partial t}+\int_0^t \psi(t-\tau)\frac{\partial V_2}{\partial\tau}\,d\tau. \tag{6}$$

В уравнениях (6) влияниями последействия, предшествовавшими моменту $t_0=0$, пренебрегаем. Отсчет координаты производится от начала линии.

Исключая J_2 из системы (6), получим

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}=a_1\frac{\partial^2 V_2}{\partial t}+a_2\frac{\partial V_2}{\partial t}+a_3V_2+\int\limits_0^t\left[\psi_1(t-s)\frac{\partial^2 V_2}{\partial s^2}+\psi_2(t-s)\frac{\partial V_2}{\partial s}\right]ds, \tag{7}$$

$$a_1=LC,\quad a_2=RC+GL+L\psi(0),\quad a_3=RG,\quad \psi_1(t-s)=C\varphi(t-s),$$

$$\psi_2(t-s)=R\psi(t-s)+L\frac{\partial\psi(t-s)}{\partial t}+G\varphi(t-z)+\psi(0)\varphi(t-s)+$$

$$+\int\limits_s^t\varphi(t-\tau)\frac{\partial\psi(\tau-s)}{\partial\tau}d\tau.$$

Решение (7), удовлетворяющее граничным и начальным условиям

$$V_2(0,t)=0,\quad V_2(l,t)=0,\quad V_2(x,0)=-V_1,\quad \partial V_2(x,0)/\partial t=0,$$

будем искать в виде

$$V_2(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Тогда получим

$$a_1T_k''+a_2T_k'+\left(\frac{k^2\pi^2}{l^2}+a_3\right)T_k+\int\limits_0^t[\psi_1(t-s)T_k''(s)+$$

$$+\psi_2(t-s)T_k'(s)]\,ds=0. \tag{8}$$

Частный случай уравнения (8) уже встречался в нашей предыдущей статье ([3]).

Общее решение уравнения (8) будет

$$T_k=e^{-b^*t}[A_1U_1(t,\lambda_k^2)+A_2U_2(t,\lambda_k^2)], \tag{9}$$

где $\lambda_k=k\pi/l$, $b^*=[RC+GL+G\psi(0)]/2LC$, U_1 и U_2 — две новые специальные функции, определяемые соотношениями

$$U_1(t,\lambda_k^2)=t-\int\limits_0^t Q(t-\tau)\,p_1(\tau)\,d\tau,\qquad U_2(t,\lambda_k^2)=1-\int\limits_0^t Q(t-\tau)\,p_2(\tau)\,d\tau,$$

$$p_1=\left(q+\frac{\lambda_k^2}{a_1}\right)t+\int\limits_0^t[K_2(t-\tau)+\tau K_3(t-\tau)]\,d\tau,$$

$$p_2=q+\frac{\lambda_k^2}{a_1}+\int\limits_0^t K_3(t-\tau)\,d\tau,\ Q(t-\tau)=t-\tau-\int\limits_\tau^t(t-s)P(t-\tau)\,ds,$$

где $P(t-\tau)$ — резольвента ядра $\left(q+\dfrac{\lambda_k^2}{a_1}\right)(t-\tau)+K_1(t-\tau)+$

$$+\int\limits_\tau^t[K_2(t-s)+(s-\tau)K_3(t-s)]\,ds,$$

$$q=\frac{4a_1a_3-a_2^2}{4a_1^2},\qquad K_1(t-\tau)=\frac{1}{a_1}\psi_1(t-\tau)\,e^{b^*(t-\tau)},$$

$$K_2(t-\tau)=\frac{1}{a_1^2}[a_1\psi_2(t-\tau)-a_2\psi_1(t-\tau)]\,e^{b^*(t-\tau)},$$

$$K_3(t-\tau)=\frac{a_2}{4a_1^3}\left[a_2\psi_1(t-\tau)-2a_1\psi_2(t-\tau)\right]e^{b^*(t-\tau)}.$$

Тогда искомое выражение для V можно написать в следующем виде

$$V=E\,\frac{\operatorname{sh}\beta^*(l-x)}{\operatorname{sh}\beta^* l}-2Ee^{-b^*t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi}{\beta^{*2}l^2+k^2\pi^2}\times$$

$$\times\left[\frac{b^*}{n_k^*}U_1(t,\lambda_k^2)+U_2(t,\lambda_k^2)\right]\sin\frac{k\pi x}{l}, \qquad (10)$$

где $n_k^*=U_1'(0,\lambda_k^2)\Big/\left[1-\frac{1}{b^*}U_2'(0,\lambda_k^2)\right]$, $\beta^*=\sqrt{R^*G^*}$.

Сравнивая формулу (10) с классической ([4]), видим, что для получения V при наличии магнитного и диэлектрического последействия достаточно в классической формуле, определяющей V, заменить постоянные β, b и n_k соответственно величинами β^*, b^*, n_k^*, а гиперболические функции $\operatorname{sh} n_k t$ и $\operatorname{ch} n_k t$ — соответственно функциями $U_1(t,\lambda_k^2)$ и $V_2(t,\lambda_k^2)$. Так, J можно определить, пользуясь формулой

$$J=S(t)-G\int_0^x V(\xi,t)\,d\xi-C\frac{\partial}{\partial t}\int_0^x V(\xi,t)\,d\xi-$$

$$-\int_0^t\psi(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^x V(\xi,\tau)\,dx\,d\tau,$$

где $S(t)$ определяется из уравнения

$$LS'(t)+RS(t)+\int_0^t\varphi(t-\tau)S'(\tau)\,d\tau=0.$$

Окончательно получим

$$J=\frac{G^*E}{\beta^*}\,\frac{\operatorname{ch}\beta^*(l-x)}{\operatorname{sh}\beta^* l}-\frac{E}{Rl}\left[1-\frac{R}{L}\int_0^t ds\int_0^s Q_1(s-\tau)\,d\tau-\frac{R}{L}\,t\right]-$$

$$-2Ele^{-b^*t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\beta^{*2}l^2+k^2\pi^2}\left\{(G^*+b^*)\left[\frac{b^*}{n_k^*}U_1(t,\lambda_k^2)+U_2(t,\lambda_k^2)\right]-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{b^*}{n_k^*}U_1'(t,\lambda_k^2)+U_2'(t,\lambda_k^2)\right]\right\}\cos\frac{k\pi x}{l}+$$

$$+2El\int_0^t e^{-b^*\tau}\psi(t-\tau)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\beta^*l^2+k^2\pi^2}\left\{\frac{b^*}{n_k^*}\left[b^*V_1(\tau,\lambda_k^2)+U_2'(\tau,\lambda_k^2)\right]+\right.$$

$$\left.+b^*U_2(\tau,\lambda_k^2)+U_2'(\tau,\lambda_k^2)\right\}\cos\frac{k\pi x}{l}\,d\tau.$$

Поступило
30 XI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] V. Volterra, Theory of Functionals and Integral Equations, London, 1931. [2] В. К. Аркадьев, Электромагнитные процессы в металлах, ч. 2, 1936. [3] М. И. Розовский, ДАН, **53**, № 7 (1946). [4] В. И. Коваленков, Устанавливающиеся электромагнитные процессы вдоль проводных линий, изд. АН СССР, 1945.