Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 7

МЕХАНИКА

Академик И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ и Б. М. АБРАМОВ

ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАШИНЫ

Как известно ([1]), уравнение движения машины или механизма с одной степенью подвижности в общем виде может быть написано так:

$$M_{\text{Д}} - M_{\text{С}} = J_{\text{П}} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_{\text{П}}}{d\varphi}, \tag{1}$$

где $M_{\text{Д}}$ — момент приведенных движущих сил, $M_{\text{С}}$ — момент приведенных сил сопротивления, $J_{\text{П}}$ — приведенный момент инерции механизма, ω — угловая скорость звена приведения и φ — угол поворота звена приведения.

Величина приведенного момента инерции $J_{\text{П}}$ является в общем случае переменной и зависит только от угла поворота φ звена приведения, т. е. от конфигурации расположения звеньев механизма. При этом кинетическая энергия T механизма в каждом рассматриваемом положении его равна:

$$T = \frac{\omega^2}{2} \sum_{1}^{n} \left[m_i \left(\frac{v_{s_i}}{\omega} \right)^2 + J_i \left(\frac{\omega_i}{\omega} \right)^2 \right] = \frac{J_{\text{П}} \omega^2}{2}. \tag{2}$$

Решение уравнения (1) в ряде случаев представляет значительные трудности, особенно когда моменты $M_{\text{Д}}$ и $M_{\text{С}}$ зависят не только от угла поворота φ, но и от других переменных. Эти трудности в некоторых случаях могут быть преодолены, если ввести в рассмотрение понятие о фиктивном, постоянном по величине, приведенном моменте инерции J_0, удовлетворяющем уравнению:

$$\frac{J_0 \omega_0^2}{2} = \frac{J_{\text{П}} \omega^2}{2} \tag{3}$$

где ω_0 — некоторая фиктивная угловая скорость звена приведения, связанная, как это видно из уравнения (3), с действительной скоростью ω условием

$$\frac{\omega_0}{\omega} = \sqrt{\frac{J_{\text{П}}}{J_0}} = f(\varphi). \tag{4}$$

Из уравнения (4) может быть всегда найдена зависимость между фиктивным φ_0 и действительным φ — углами поворота звена приведения на любом интервале от i до $i+1$:

$$\varphi_{0(i+1)} - \varphi_{0(i)} = \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \sqrt{\frac{J_{\text{П}}}{J_0}}\, d\varphi. \tag{5}$$

Обозначим, далее, разность моментов $M_Д$ и $M_С$ в уравнении (1) через ΔM. Тогда из уравнения мощностей получим:

$$\Delta M_0 \omega_0 = \Delta M \omega. \tag{6}$$

Подставим величины J_0 и ΔM_0 в уравнение (1). Имеем:

$$\Delta M_0 \frac{\omega_0}{\omega} = J_0 \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{d\left[J_0 \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]}{d\varphi}. \tag{7}$$

Так как $\frac{d\omega}{dt} = \omega_0 \frac{d\omega}{d\varphi_0}$ и $\frac{dJ_П}{d\varphi} = \frac{\omega_0}{\omega} \frac{dJ_П}{d\varphi_0}$, то, следовательно, уравнение (7) примет вид:

$$\Delta M_0 = J_0 \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) \omega_0 \frac{d\omega}{d\varphi_0} + \frac{\omega^2}{2} \frac{d\left[J_0 \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]}{d\varphi_0}. \tag{8}$$

Вследствие того, что $J_0 = \text{const}$, уравнение (8) может быть представлено так:

$$\Delta M_0 = J_0 \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) \omega_0 \frac{d\omega}{d\varphi_0} + \frac{\omega^2}{2} J_0 \frac{d\left[\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]}{d\varphi_0} \tag{9}$$

$$\Delta M_0 = J_0 \omega_0 \frac{d\omega_0}{d\varphi_0} \left[\frac{\omega_0}{\omega} \frac{d\omega}{d\omega_0} + \frac{\omega^2}{2} \frac{1}{\omega_0} \frac{d\left[\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]}{d\omega_0}\right]. \tag{10}$$

Так как выражение

$$\frac{\omega_0}{\omega} \frac{d\omega}{d\omega_0} + \frac{\omega^2}{2} \frac{1}{\omega_0} \frac{d\left[\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]}{d\omega_0} = 1,$$

то окончательное уравнение движения машины будет иметь теперь следующий вид:

$$\Delta M_0 = J_0 \omega_0 \frac{d\omega_0}{d\varphi_0} \tag{11}$$

или

$$\Delta M_0 = J_0 \frac{d\omega_0}{dt} = J_0 \frac{d^2\varphi_0}{dt^2}. \tag{12}$$

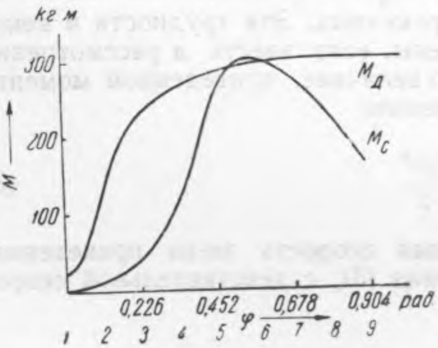

Рис. 1

Применим полученное уравнение для решения задачи об определении движения звена приведения для случая, когда моменты $M_Д$, $M_С$ и приведенный момент инерции $J_П$ являются функциями только угла поворота φ звена приведения, т. е. $M_Д = M_Д(\varphi)$, $M_С = M_С(\varphi)$ и $J_П = J_П(\varphi)$.

Уравнение (11) может быть представлено так:

$$\Delta M_0 \, d\varphi_0 = J_0 \, \omega_0 \, d\omega_0. \tag{13}$$

Из уравнения (6) имеем $\Delta M_0 \, d\varphi_0 = \Delta M \, d\varphi$.

Следовательно,

$$\Delta M \, d\varphi = J_0 \, \omega_0 \, d\omega_0. \tag{14}$$

откуда

$$\int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \Delta M\, d\varphi = J_0 \int_{\omega_{0(i)}}^{\omega_{0(i+1)}} \omega_0\, d\omega_0, \qquad (15)$$

или

$$\int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \Delta M\, d\varphi = \frac{J_0}{2}\left(\omega_{0(i+1)}^2 - \omega_{0(i)}^2\right). \qquad (16)$$

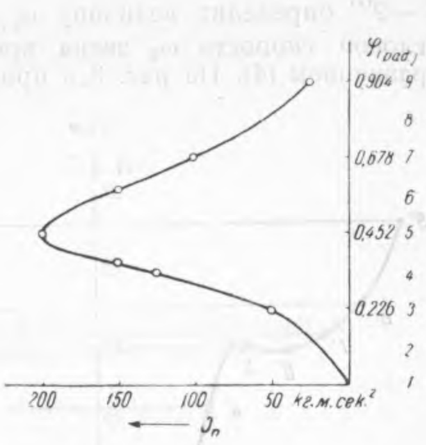

Рис. 2

Из уравнения (16) получаем:

$$\omega_{0(i+1)} = \left(\frac{2\int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \Delta M\, d\varphi}{J_0} + \omega_{0(i)}^2 \right)^{1/2}. \qquad (17)$$

Имея заданными: функцию $\Delta M = \Delta M(\varphi)$ и начальную скорость $\omega_{0(i)}$, задаемся произвольным значением фиктивного момента инерции J_0 (можно, например, принять его равным единице) и определяем из уравнения (17) величину угловой скорости $\omega_{0(i+1)}$.

Если с помощью уравнения (17) произвести определение угловой скорости ω_0 для ряда последовательных значений угла φ, то может быть определена зависимость $\omega_0 = \omega_0(\varphi)$, после чего с помощью уравнения (4) может быть определена зависимость $\omega = \omega(\varphi)$, т. е. зависимость действительной угловой скорости ω от действительного угла φ поворота звена приведения.

Покажем применение выведенного уравнения к задаче исследования движения механизма выдвигающегося шасси самолета. На рис. 1 даны кривые изменения $M_Д = M_Д(\varphi)$ и $M_С = M_С(\varphi)$, а на рис. 2 кривая $J_П = J_П(\varphi)$ [2].

Ординаты, заключенные между кривыми $M_Д = M_Д(\varphi)$ и $M_С = M_С(\varphi)$, определяют величины избыточного момента ΔM, а площади, заключенные между этими кривыми, пропорциональны интегралу левой части уравнения (16), представляющему собой работу избыточного момента, которую для интервала от i до $i+1$ обозначим через A_i^{i+1}. Пользуясь методом графического интегрирования, определяем значения работы избыточного момента A для всех интервалов движения механизма и строим график этой работы $A = A(\varphi)$ (рис. 3, *а*) на всем интервале движения от начала движения механизма (положение *1*), когда его скорость ω, а следовательно, и скорость ω_0 равны нулю, до конечного положения (положение *9*). Далее задаемся каким-либо значением фиктивного момента инерции J_0 (в рассматриваемой задаче J_0 принят равным 50 кг·м.сек.²) и строим кривую T в функции угловой скорости ω_0 (рис. 3, *б*), пользуясь условием $T = J_0\omega_0^2/2$. Нетрудно видеть, что кривая $T = T(\omega_0)$ будет параболой.

Далее, используем уравнение (16) следующим образом. Пусть, например, требуется определить фиктивную угловую скорость ω_0 во втором положении звена приведения, т. е. угловую скорость $\omega_{0(2)}$. Из точки *2* на оси $O\varphi$ (рис. 3, *а*) проводим вертикаль до пересечения в точке *2'* с кривой $A = A(\varphi)$. Из точки *2'* проводим горизонталь *2' — 2''* до пересечения в точке *2''* с кривой $T = T(\omega_0)$. Из точки *2''* проводим вертикаль *2'' — 2'''* до пересечения с горизонталью *2 — 2'''*, проведенной из точки *2*, лежащей на оси $O\varphi$ (рис. 3, *в*). Ордината

$2-2'''$ определит величину $\omega_{0(2)}$. Для определения действительной угловой скорости ω_2 звена приведения в положении *2* пользуемся уравнением (4). На рис. 3, *в* против соответствующих положений ука-

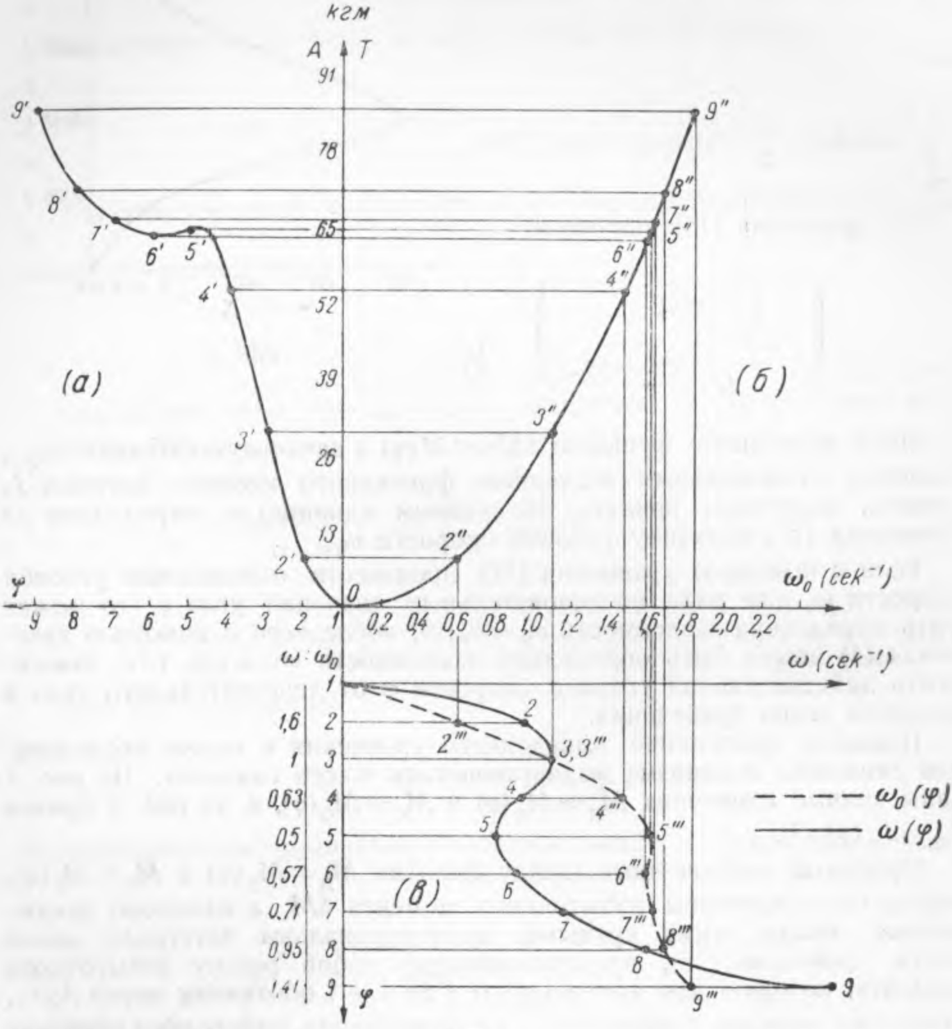

Рис. 3

заны отношения ω/ω_0, подсчитанные по формуле (4). Для положения *2* это отношение равно 1,6. Пользуясь этим отношением, вычисляем действительную угловую скорость ω_2 и откладываем ее в виде отрезка $2-2$ (рис. 3, *в*). Аналогично могут быть построены и другие точки кривых $\omega_0=\omega_0(\varphi)$ и $\omega=\omega(\varphi)$. Первая кривая показана на рис. 3, *в* пунктиром, а вторая — сплошной линией.

Так решается задача о движении механизма под действием сил, заданных в функции положения звена приведения. Легко далее показать, что решение задачи о движении механизма под действием сил, являющихся функцией скорости звена приведения, также может быть получено с помощью данного нами уравнения.

Поступило
3 I 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. И. Артоболевский, Теория механизмов и машин, 1940. [2] В. А. Зиновьев, Тр. семинара по теории машин и механизмов, IV, АН СССР (1948).